解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\times(\nabla\psi) = 0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$

(3) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

問題 2

(1) n 個の質点からなる系を考える. 各質点の質量を $m_i(i = 1\cdots n)$, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(i = 1\cdots n)$ とする. i 番目の質点の運動方程式が

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{i,ex} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{ij}$$

と表されるとする. ここで $\boldsymbol{f}_{i,ex}$ は i 番目の質点に働く外力, $\boldsymbol{f}_{ij}$ は j 番目の質点が i 番目の質点に及ぼす内力で $\boldsymbol{f}_{ii} = 0$ である. このとき系の全角運動量 $\boldsymbol{L}_{all}$ の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{L}_{all}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_{i,ex}, \quad \boldsymbol{N}_{i,ex} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{i,ex}$$

となることを示せ.

(2) 太陽の周囲を公転する惑星は, 万有引力の法則にしたがい太陽からの距離の 2 乗に比例した力を受ける. その運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

と表される. ここで $\boldsymbol{r}$ は太陽を原点とする惑星の位置ベクトル, $r = |\boldsymbol{r}|$, M は太陽の質量, G は万有引力定数である. 惑星の面積速度を $\boldsymbol{h}$ とおくと,

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \times \boldsymbol{h} = -\frac{GM}{2r^3}\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}\right]$$

と表されることを示せ. ここで $\boldsymbol{v}$ は惑星の速度である.

問題 3

(1) $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$$

を, S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(1-1) 単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(1-2) 平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm, 1$ で囲まれる立方体の表面.

(2) スカラー場 φ の勾配 $\nabla\varphi$ の, 空間内の点 A から点 B に至る経路 C に沿った線積分は

$$\int_C \nabla\varphi\cdot\, d\boldsymbol{r} = \varphi(\mathrm{B}) - \varphi(\mathrm{A})$$

となることを示せ. ここで $\varphi(\mathrm{A})$ は点 A における φ の値を表す.

問題 4

(1) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱エネルギー (熱フラックス) $\boldsymbol{q}$ (J m^{-2} sec^{-1}) は

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{0.1}$$

と表される. ここで T は物体の温度, k は **熱伝導率** (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を**熱伝導** と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\nabla^2 T. \tag{0.2}$$

ここで κ は **熱拡散率** (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c を用いて $\kappa = k/\rho c$ と表される.

(2) 閉曲線 C に沿って発生する磁場を $\boldsymbol{H}$ とすると, アンペールの法則から

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = I$$

が成り立つ. ここで I は C によって囲まれた曲面 S を通過する全電流である. 電流密度ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とすると $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ と表されることを用いて, 微分形のアンペールの法則

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$$

を求めよ.