## 11.3 正則関数の積分 (1): 未解説分のみ

(3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

これより任意の複素数 $\alpha, \beta$ に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz}g(z)\,dz$$

を証明せよ.

解説)
正則な関数 $h(z) = f(z)g(z)$ を考える.

$$h(\beta) - h(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{dh}{dz}\Big) dz$$

ここで,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= f((\beta))g(\beta)) - f(\alpha)g(\alpha) \\
&= \Big[f(z)g(z)\Big]_{\alpha}^{\beta}
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dz}\Big(f(z)g(z)\Big)dz \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz}\Big)dz \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz}g(z)dz + \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}dz
\end{aligned}$$

従って,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}dz = \Big[f(z)g(z)\Big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz}g(z)dz$$

## 11.5 正則関数の積分 (3)

複素平面上において次式で与えられる曲線 $C_1, C_2, C_3$ が与えられたとする. このとき以下の問いに答えよ.

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \quad z = \sqrt{3}e^{i\pi t} \quad (0 \le t \le 1) \\
C_2 &: \quad z = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t \quad (0 \le t \le 1) \\
C_3 &: \quad z = i + e^{i\pi t}/2 \quad (0 \le t \le 2)
\end{aligned}
$$

(1) 曲線 $C_1, C_2, C_3$ を複素平面上に図示せよ.
解答)
図略

(2) 曲線 $C_1, C_2, C_3$ に囲まれた領域で関数 $f(z) = 1/(z-i)$ は正則である. このとき次式が成り立つことを示せ.

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-i} = -\int_{C_2} \frac{dz}{z-i} + \oint_{C_3} \frac{dz}{z-i}$$

解答)
11.3 (2) を参考にすると,

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{z-i} = \oint_{C_3} \frac{dz}{z-i}$$

従って,

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-i} + \int_{C_2} \frac{dz}{z-i} = \oint_{C_3} \frac{dz}{z-i}$$

と表せて, 題意は示された.

(3) 次の積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_{C_2}\frac{dz}{z-i}$

解答)
積分路 $\mathrm{C}_2$ の範囲で積分を実行する.

$$\begin{aligned}\int_{C_2}\frac{dz}{z-i} &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{(z-i)'}{z-i}dz\\ &= \Big[\log(z-i)\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\\ &= \log\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)\\ &= \frac{2}{3}\pi i\end{aligned}$$

(ii) $\displaystyle\oint_{C_3}\frac{dz}{z-i}$

解答)
前問と同様にして計算をする.

$$\oint_{C_3}\frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

(4) (2), (3) の結果を用いて以下の積分を求めよ.

$$\int_{C_1}\frac{dz}{z-i}$$

解答)
(2), (3) の結果を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\frac{dz}{z-i} &= -\int_{C_2}\frac{dz}{z-i}+\oint_{C_3}\frac{dz}{z-i}\\ &= -\frac{2}{3}\pi i+2\pi i\\ &= \frac{4}{3}\pi i\end{aligned}$$