12.1 コーシーの積分公式 (1)

(1) 次の積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とし内部に $z=\pi/2$ を含む円を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z}\,dz$

$f(z)=\sin z$ とすると,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\sin z}{z-0} &= 2\pi i f(0)\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

ii) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z}\,dz$

$f(z)=1-\cos z$ とすると

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1-\cos z}{z} &= 2\pi i f(0)\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

iii) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)/2}\,dz$

1. C が内部に π を含まない場合,

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ とすると,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)/2}\,dz &= 2\pi i f(0)\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

2. C が内部に π を含む場合,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)/2}\,dz &= 2\oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)}\,dz\\ &= -\frac{2}{\pi}\oint_C \left(\frac{\sin z}{z}-\frac{\sin z}{(z-\pi)}\right)dz\end{aligned}$$

ここで, $f(z)=\sin z$ とすると,

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{\pi}2\pi i\Big(f(0)-f(\pi)\Big)\\ &= -4i(0-0)\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

iv) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z(z-\pi/2)}\,dz$

$f(z)=1-\cos z$ とすると,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1-\cos z}{z(z-\pi/2)}\,dz &= -\frac{2}{\pi}\oint_C\left(\frac{1-\cos z}{z}-\frac{1-\cos z}{(z-\pi/2)}\right)dz\\ &= -\frac{2}{\pi}2\pi i\Big(f(0)-f(\pi/2)\Big)\\ &= -4i(0-1)\\ &= \mathbf{4}i\end{aligned}$$

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ に対し積分 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz$ を求めよ. ただし積分路 C は原点と $f(z)$ の全ての特異点を含む閉曲線を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{z^2-1}$

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz &= \oint_C \frac{\sin\pi z}{z(z+1)(z-1)}\,dz\\ &= \oint_{C1+C_2+C_3}\frac{\sin\pi z}{z(z+1)(z-1)}\,dz\\ &= \oint_{C_1}\frac{\sin\pi z/z(z+1)}{(z-1)}\,dz+\oint_{C_2}\frac{\sin\pi z/(z^2-1)}{(z)}\,dz+\oint_{C_3}\frac{\sin\pi z/z(z-1)}{(z+1)}\,dz\\ &= 2\pi i\left\{\left[\frac{\sin\pi z}{z(z+1)}\right]_{z=1}+\left[\frac{\sin\pi z}{z^2-1}\right]_{z=0}+\left[\frac{\sin\pi z}{z(z-1)}\right]_{z=-1}\right\}\\ &= 2\pi i(0+0+0)\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

ii) $f(z)=\dfrac{1}{z^3+1}$

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz &= \oint_C \frac{1}{z(z^3+1)}\,dz\\ &= \oint_C \frac{1}{z(z+1)(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2})(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2})}\,dz\\ &= 2\pi i\left\{\left[\frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)}\right]_{z=0}+\left[\frac{1}{z(z^2-z+1)}\right]_{z=-1}\right.\\ &\qquad\left.+\left[\frac{1}{z(z+1)(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2})}\right]_{z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}+\left[\frac{1}{z(z+1)(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2})}\right]_{z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}\right\}\\ &= 2\pi i(1-1/3-1/3-1/3)\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

iii) $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz &= \oint_C \frac{1+\cos z}{z(z-\pi)}\,dz \\
&= 2\pi i\left\{\left[\frac{1+\cos z}{z-\pi}\right]_{z=0} + \left[\frac{1+\cos z}{z}\right]_{z=\pi}\right\} \\
&= 2\pi i(-\frac{2}{\pi}+0) \\
&= -4i
\end{aligned}$$

iv) $f(z) = \dfrac{1}{e^{2\pi iz}+1} \quad (|z| < 1/2)$

$f(z)$ に特異点があるかどうかを調べる.

$$\begin{aligned}
e^{2\pi iz} &= \cos 2\pi z + i\sin 2\pi z \\
z &= 1/2
\end{aligned}$$

問題の条件より，　$(|z| < 1/2)$ なので特異点はない.
従って,

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz &= \oint_C \frac{1}{z(e^{2\pi iz}+1)}\,dz \\
&= 2\pi i\left\{\left[\frac{1}{e^{2\pi iz}+1}\right]_{z=0}\right\} \\
&= \boldsymbol{\pi} i
\end{aligned}$$

12.2 コーシーの積分公式 (2)

複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$$

を考える. ここで a, b は実定数で $a > 0, b > 0$ とする.

(1) 図 12.1 の積分路 C, C_+ について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} f(z)\,dz = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

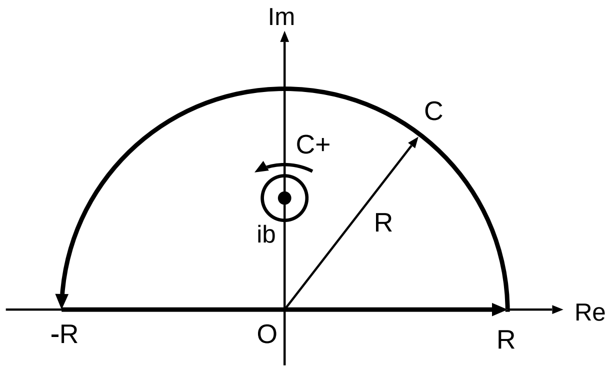

図 12.1: 積分路 C と C_+

解説)
コーシーの積分定理より,

$$\oint_C f(z)\,dz \quad = \quad \oint_{C_+} f(z)\,dz \tag{12.1}$$

また,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} f(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} \frac{e^{iaz}}{(z+ib)(z-ib)}\,dz \\
&= \left\{\left[\frac{e^{iaz}}{z+ib}\right]_{z=ib}\right\} \\
&= \frac{e^{-ab}}{2ib}
\end{aligned} \tag{12.2}$$

(12.1), (12.2) より,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} f(z)\,dz = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

(2) 図 12.1 の積分路を実軸について対称の位置に変換して得られる積分路 C', C_- (図 12.2) について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,dz = \frac{e^{ab}}{2ib}$$

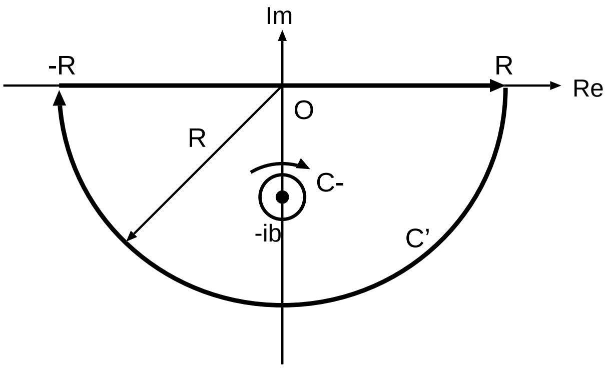

図 12.2: 積分路 C' と C_-

コーシーの積分定理より,

$$\oint_{C'} f(z)\,dz \quad = \quad \oint_{C_-} f(z)\,dz \tag{12.3}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,dz &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} \frac{e^{iaz}}{(z+ib)(z-ib)}\,dz \\ &= -\left\{\left[\frac{e^{iaz}}{z+ib}\right]_{z=-ib}\right\} \\ &= \frac{e^{ab}}{2ib} \end{aligned} \tag{12.4}$$

(12.3), (12.4) より,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,dz = \frac{e^{ab}}{2ib}$$

よって, 示せた.

12.3 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, $f(z)$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \tag{12.5}$$

と表される.

(1) $f(z) = z^2$ とする. 以下の周回積分

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

を求め, それぞれが $f(z), f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z)$ に等しいことを示せ. ここで積分路 C は点 z を正の向きに一周する閉曲線とする.

解答)
$f(z) = z^2$**,** $f(z)' = 2z$**,** $f(z)'' = 2$**,** $f(z)''' = 0$ である**.**
また**,** $\zeta = re^{i\theta} + z$**,** $\dfrac{d\zeta}{d\theta} = ire^{i\theta}$
ここで $n = 0 \sim 3$ を代入し**,** 等しいかを調べる**.**

i) $n = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{0!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{0+1}}\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(re^{i\theta} + z)^2 \cdot ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (r^2e^{2i\theta} + 2re^{i\theta}z + z^2)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}z^2(2\pi - 0) \\
&= \boldsymbol{z}^2
\end{aligned}$$

ii) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{1+1}}\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(re^{i\theta} + z)^2 \cdot ire^{i\theta}}{r^2e^{i\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} (r^2e^{i\theta} + 2rz + z^2e^{-i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r}zr(2\pi - 0) \\
&= \mathbf{2}z
\end{aligned}$$

iii) $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{2+1}}\,d\zeta &= \frac{2}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi}(r^2 + 2rze^{-i\theta} + z^2e^{-2i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{2}{2\pi r^2}r^2(2\pi - 0) \\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

iv) $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{3+1}}\,d\zeta &= \frac{6}{2\pi r^3}\int_0^{2\pi}(r^2e^{-i\theta} + 2rze^{-2i\theta} + z^2e^{-3i\theta})\,d\theta \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

これら結果より, それぞれが $f(z), f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z)$ に等しいことが示せた.

(2) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{(z+i)(z-i)}\,dz \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{e^{zt}}{z-i} - \frac{e^{zt}}{z+i}\right)dz \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{C_+}\frac{e^{zt}}{z-i}\,dz - \oint_{C_-}\frac{e^{zt}}{z+i}\right)dz \\
&= \frac{1}{2i}\Big([e^{zt}]_{z=i} - [e^{zt}]_{z=-i}\Big) \\
&= \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\cos t + i\sin t - \cos(-t) - i\sin(-t)\Big) \\
&= \sin t
\end{aligned}$$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz = \cos t$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\Big(\oint_{C_+}\frac{e^{zt}}{z-i}\,dz + \oint_{C_-}\frac{e^{zt}}{z+i}\Big)\,dz \\
&= \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos t + i\sin t + \cos t - i\sin t\Big) \\
&= \cos t
\end{aligned}
$$