3.1 運動の法則

ニュートンの運動の三法則は

- 外力を与えられない質点の運動量は時間変化しない (**慣性の法則**)
- 質点の運動量の時間変化は, 与えられた力の大きさに比例し力の方向に作用する (**運動の法則**)
- 質点 A が別の質点 B に力を及ぼすとき, 質点 A は質点 B から同じ大きさで向きが反対の力を受ける (**作用反作用の法則**)

である. 質点の質量と速度をそれぞれ m, $\boldsymbol{v}$, 質点に与えられる外力を $\boldsymbol{F}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上記の慣性の法則と運動の法則を式で表せ.

(2) 力 $\boldsymbol{F}$ が時刻 t_0 から t_1 まで作用したとする. このとき,

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\,dt$$

をその間における力 $\boldsymbol{F}$ の**力積**という. このとき

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\,dt = m(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)$$

と表されることを示せ. ここで $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1$ はそれぞれ時刻 t_0, t_1 における速度である.

(3) 定点 O に対する質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とするとき, 質点の運動量のモーメント (**角運動量**) $\boldsymbol{L}$ は以下のように定義される.

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}.$$

$\boldsymbol{L}$ の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

と表されることを示せ.

(4) 質点の**運動エネルギー** T は以下のように定義される.

$$T(t) \equiv \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)^2.$$

時刻 t_0, t_1 における運動エネルギーをそれぞれ T_0, T_1 とすると,

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\,dt$$

となることを示せ.

3.2 質点系の角運動量と運動エネルギー

n 個の質点からなる系を考える. 各質点の質量を $m_i(i = 1 \cdots n)$, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(i = 1 \cdots n)$ とする.

(1) 系の全運動エネルギー T_{all} は

$$T_{all} = \frac{1}{2}m\overline{\boldsymbol{v}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\boldsymbol{v}_i - \overline{\boldsymbol{v}})^2$$

と表されることを示せ. ここで m は系の全質量, $\overline{r}$ は重心の位置ベクトル, $\overline{\boldsymbol{v}}$ は重心の速度である.

(2) i 番目の質点の運動方程式は

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{i,ex} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{ij}$$

とする. ここで $\boldsymbol{f}_{i,ex}$ は i 番目の質点に働く外力, $\boldsymbol{f}_{ij}$ は j 番目の質点が i 番目の質点に及ぼす内力で $\boldsymbol{f}_{ii} = 0$ である. このとき系の全角運動量 $\boldsymbol{L}_{all}$ の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{L}_{all}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_{i,ex}, \quad \boldsymbol{N}_{i,ex} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{i,ex}$$

となることを示せ.

3.3 惑星の軌道

太陽の周囲を公転する惑星は, 万有引力の法則にしたがい太陽からの距離の 2 乗に比例した力を受ける. その運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

と表される. ここで $\boldsymbol{r}$ は太陽を原点とする惑星の位置ベクトル, $r = |\boldsymbol{r}|$, M は太陽の質量, G は万有引力定数である.

(1) 惑星の面積速度を $\boldsymbol{h}$ とおくと,

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \times \boldsymbol{h} = -\frac{GM}{2r^3}\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}\right]$$

と表されることを示せ. ここで $\boldsymbol{v}$ は惑星の速度である.

(2) (1) の結果を利用して

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{h} = \frac{GM}{2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r} + e\boldsymbol{a}\right)$$

となることを示せ. ここで $e\boldsymbol{a}$ は定ベクトル, e は任意のスカラー, $\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルである.

(3) (2) で求めた式と $\boldsymbol{r}$ との内積をとることで

$$r = \frac{4h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta}$$

となることを示せ. ここで θ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{a}$ とのなす角である. また e の値によって r の描く軌跡がどうなるか説明せよ.

3.4 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. ただし $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\
\frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3
\end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.