

9.1 複素関数の微分

h を偏角一定の複素数とする. このとき極限值

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (9.1)$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能と言う. その極限値を $f(z)$ の $z = z_0$ における微分係数と言ひ, $f'(z_0)$ や $\frac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で正則であるという.

- (1) $f(z) = z^2$ とする. $h = \Delta x$ として式 (9.1) の定義に従ひ $f'(z)$ を計算せよ.
- (2) $f(z) = z^2$ とする. $h = i\Delta y$ として式 (9.1) の定義に従ひ $f'(z)$ を計算せよ.
- (3) $f(z) = z^2$ とする. $h = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta y = k\Delta x$ として, 式 (9.1) の定義に従ひ $f'(z)$ を計算せよ.
- (4) $f(z) = z^n$ の場合, 式 (9.1) の極限は h の偏角の値によらず nz^{n-1} に収束することを示せ.

9.2 等角写像

関数 $f(z) = z^2$ による写像 $w = f(z)$ の性質について考える.

- (1) z 平面上の 2 つの直線

$$(a) z = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + i\frac{t}{2}$$

$$(b) z = 1 + \frac{t}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

(ただし t は実数) の交点 z_0 と z_0 における直線の交角 θ を求めよ.

- (2) (1) で与えられた 2 つの直線の写像 $f(z)$ による w 平面上の像を求め, それを図示せよ.
- (3) (2) で求めた w 平面上での像の交点と, 交点における像の接線のなす角 θ' を求めよ.

9.3 コーシー・リーマンの定理

- (1) 領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x, y), v(x, y)$ とする ($z = x + iy, z \in D$). u, v が連続で, かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9.2)$$

を満たすならば, 関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の必要条件の証明).

- (2) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) が正則であるならば, 実関数 $u(x, y), v(x, y)$ は式 (9.2) を満たすことを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の十分条件の証明).

コーシー・リーマンの微分方程式 (9.2) を変形すると, $u(x, y), v(x, y)$ の満たす式として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が得られる. これらは 2 次元のラプラス方程式である. ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれる. コーシー・リーマンの微分方程式 (9.2) の関係を満たすような調和関数の組を, 違いに共役な調和関数という.

- (3) $u(x, y) = e^x \sin y$ は調和関数であることを確かめよ.
(4) 上記の u に共役な調和関数 $v(x, y)$ を求めよ.

9.4 複素関数の正則性

以下の複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) の関数 $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$