解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

複素数 z は任意の実数 x, y と虚数単位 i を用いて $z = x + iy$ と定義される. x, y はそれぞれ z の 実部 (real part), 虚部 (imaginary part) と呼び, $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$ と表す.

(1) $-i$ の平方根を求めよ.

(2) 2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ の和, 差, 積は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

と表される. このとき z_1/z_2 の実部, 虚部を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ.

(3) 複素数 $z = x+iy$ の虚部の符号を変えたもの $x-iy$ を z の共役複素数 (complex conjugate) と呼び, $\overline{z}$ と表す. このとき以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

(4) 複素数 $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ は $\sqrt{x^2 + y^2}$ と定義される. このとき任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(三角不等式)}$$

(5) 一般に n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \tag{0.1}$$

問題 **2**

次の関数 $f(z)$ の特異点 z_0 を求め, それが極であるならばその位数 k と極限値

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

を求めよ.

(1) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

(2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$

(3) $f(z) = \dfrac{z^3 - z^2}{z^2 + 1}$

(4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z + 1}$

(5) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 - z^2 - z + 1}$

(6) $f(z) = \dfrac{2z - 1}{z^2 + 3z + 2}$

(7) $f(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$ (n は 正の整数)

(8) $f(z) = c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}$ (k は正の整数)

問題 3

(1) 3 点 $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ を頂点とする三角形を正の向きに一周する閉曲線を C とする. 次の周回積分を求めよ.

i) $\displaystyle\oint_C z\,dz$

ii) $\displaystyle\oint_C \overline{z}\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C e^{iz}\,dz$

(2) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は点 $z = \alpha$ を中心とする半径 a の円周を正の向きに 1 周するものとるする.

i) $\displaystyle\oint_C dz$

ii) $\displaystyle\oint_C (z-\alpha)\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-\alpha}$

iv) $\displaystyle\oint_C (z-\alpha)^n\,dz$ (n は整数)

(3) 積分

$$\int_C z\,dz \quad (C : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < \pi/2)$$

について不等式

$$\left|\int_C z\,dz\right| < \int_C |z|\,|\,dz|$$

が成り立つことを示せ.

問題 4

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, $f(z)$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \tag{0.2}$$

と表される.

(1) $f(z) = z^2$ とする. 以下の周回積分

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

を求め, それぞれが $f(z), f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z)$ に等しいことを示せ. ここで積分路 C は点 z を正の向きに一周する閉曲線とする.

(2) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\, dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z e^{zt}}{z^2+1}\, dz = \cos t$