解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

(1) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$

(2) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(3) $\nabla\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2}$

(4) $\nabla f(g) = \dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

問題 2

3 次元直交座標系における回転について考える. 回転とは次の 2 つのいずれかの操作を意味する

i) 座標軸は固定し, 原点のまわりに空間内の点を回転させる,

ii) 点は固定し, 座標軸を原点の周りに回転させる.

ここでは ii) の座標軸の回転を考えることにする.

回転前の 3 つの直交座標軸 $1, 2, 3$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転後 (すべてプライム $'$ をつけて表す) の直交座標軸 $1', 2', 3'$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ で表す. このとき位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ はそれぞれの座標系において,

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3$$

と表される.

(1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に書けることを示せ. この行列は回転行列と呼ばれる.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{但し } a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

ここで $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ はベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の内積を表す.

(2) 次の各軸の周りに角度 θ それぞれ右ねじ回転するときの回転行列 $R_3(\theta)$, $R_2(\theta)$, $R_1(\theta)$ の表式をそれぞれ求めよ.

1) 第 3 軸　2) 第 2 軸　3) 第 1 軸

(3) 回転行列 $R_3(\theta)$, $R_2(\theta)$, $R_1(\theta)$ は互いに可換か.

問題 3

(1) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱エネルギー (熱フラックス) $\boldsymbol{q}$ (J m^{-2} sec^{-1}) は

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{0.1}$$

と表される. ここで T は物体の温度, k は 熱伝導率 (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を熱伝導 と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \tag{0.2}$$

ここで κ は 熱拡散率 (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c を用いて $\kappa = k/\rho c$ と表される.

(2) 閉曲線 C に沿って発生する磁場を $\boldsymbol{H}$ とすると, アンペールの法則から

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = I$$

が成り立つ. ここで I は C によって囲まれた曲面 S を通過する全電流である. 電流密度ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とすると $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ と表されることを用いて, 微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$$

を求めよ.

問題 4

(1) 勾配と発散の一般形から直交曲線座標におけるラプラシアン $\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$ の一般形を導け.

(2) 円筒座標における $\nabla^2\varphi$ の表式を求めよ.

(3) 球座標における $\nabla^2\varphi$ の表式を求めよ.