11.1 複素積分

(1) 3 点 $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ を頂点とする三角形を正の向きに一周する閉曲線を C とする. 次の周回積分を求めよ.

i) $\displaystyle\oint_C z\,dz$

ii) $\displaystyle\oint_C \overline{z}\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C e^{iz}\,dz$

(2) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は点 $z = \alpha$ を中心とする半径 a の円周を正の向きに 1 周するものとるする.

i) $\displaystyle\oint_C dz$

ii) $\displaystyle\oint_C (z - \alpha)\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z - \alpha}$

iv) $\displaystyle\oint_C (z - \alpha)^n\,dz$ (n は整数)

(3) 積分

$$\int_C z\,dz \quad (C : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < \pi/2)$$

について不等式

$$\left|\int_C z\,dz\right| < \int_C |z|\,|dz|$$

が成り立つことを示せ.

11.2 コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が領域 D 上で正則で，単純閉曲線 C がその内部も含めてすべて D に 属するものとする．このとき

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{11.1}$$

である．

(1) 複素数 z の関数 $\sin z$ は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$$C_1:\ z = \pi t \quad (0 \le t \le 1)$$
$$C_2:\ z = \pi + i(t-1) \quad (1 \le t \le 2)$$
$$C_3:\ z = -\pi(t-3) + i \quad (2 \le t \le 3)$$
$$C_4:\ z = -i(t-4) \quad (3 \le t \le 4)$$

に沿った $\sin z$ の周回積分は零となることを確かめよ.

(2) 複素数 z の関数 e^z は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$$C_1:\ z = t \quad (0 \le t \le 1)$$
$$C_2:\ z = 1 + i\pi(t-1) \quad (1 \le t \le 2)$$
$$C_3:\ z = -(t-3) + i\pi \quad (2 \le t \le 3)$$
$$C_4:\ z = -i\pi(t-4) \quad (3 \le t \le 4)$$

に沿った e^z の周回積分は零となることを確かめよ.

11.3 正則関数の積分 (1)

(1) $f(z)$ を領域 D において正則な関数 ($z \in \boldsymbol{C}$) とする. D 内の 2 点 P, Q を結び, かつ D 内に含まれる任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 に沿って点 P から Q まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つことを示せ.

(2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z \in \boldsymbol{C}$). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\oint_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つこと示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

(3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

これより任意の複素数 α, β に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz} g(z)\,dz$$

を証明せよ.

11.4 正則関数の積分 (2)

(1) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とする半径 2 の円を反時計周りに一周するものとする.

(i) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$

(ii) $\displaystyle\oint \frac{z}{z^2+1}\,dz$

(2) 次の積分の値を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2\,dz$

(ii) $\displaystyle\int_0^{(\pi/2)i} e^z\,dz$

(3) 原点を中心とする半径 r の円周を C とする. C を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz}\,dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\cos(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\sin(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

11.5　正則関数の積分 (3)

複素平面上において次式で与えられる曲線 C_1, C_2, C_3 が与えられたとする．このとき以下の問いに答えよ．

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \quad z = \sqrt{3}e^{i\pi t} \quad (0 \leq t \leq 1) \\
C_2 &: \quad z = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t \quad (0 \leq t \leq 1) \\
C_3 &: \quad z = i + e^{i\pi t}/2 \quad (0 \leq t \leq 2)
\end{aligned}
$$

(1) 曲線 C_1, C_2, C_3 を複素平面上に図示せよ．

(2) 曲線 C_1, C_2, C_3 に囲まれた領域で関数 $f(z) = 1/(z-i)$ は正則である．このとき次式が成り立つことを示せ．

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-i} = -\int_{C_2} \frac{dz}{z-i} + \oint_{C_3} \frac{dz}{z-i}$$

(3) 次の積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{dz}{z-i}$

(ii) $\displaystyle\oint_{C_3} \frac{dz}{z-i}$

(4) (2), (3) の結果を用いて以下の積分を求めよ．

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-i}$$

11.6 コーシーの積分公式 (1)

(1) 次の積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とし内部に $z = \pi/2$ を含む円を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z}\,dz$

ii) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z}\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)/2}\,dz$

iv) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z(z-\pi/2)}\,dz$

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ に対し積分 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz$ を求めよ. ただし積分路 C は原点と $f(z)$ の全ての特異点を含む閉曲線を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^2-1}$

ii) $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$

iii) $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$

iv) $f(z) = \dfrac{1}{e^{2\pi i z}+1} \quad (|z| < 1/2)$

11.7 コーシーの積分公式 (2)

複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$$

を考える. ここで a, b は実定数で $a > 0, b > 0$ とする.

(1) 図 11.1 の積分路 C, C_+ について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} f(z)\,dz = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

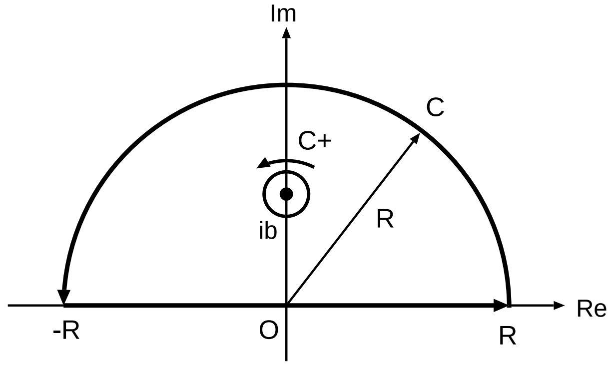

図 11.1: 積分路 C と C_+

(2) 図 11.1 の積分路を実軸について対称の位置に変換して得られる積分路 C', C_- (図 11.2) について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,dz = \frac{e^{ab}}{2ib}$$

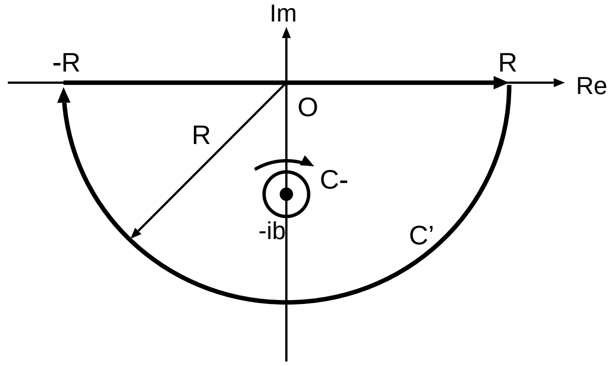

図 11.2: 積分路 C' と C_-