12.1 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, $f(z)$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \tag{12.1}$$

と表される.

(1) $f(z) = z^2$ とする. 以下の周回積分

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

を求め, それぞれが $f(z), f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z)$ に等しいことを示せ. ここで積分路 C は点 z を正の向きに一周する閉曲線とする.

(2) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz = \cos t$

12.2 留数定理

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C 上で連続, C で囲まれた領域 D 上で n 個の特異点 z_k ($k = 1, 2, \cdots n$) を持ち, それらの点以外では正則であるとき,

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(z_k) \tag{12.2}$$

が成り立つ. ここで $\mathrm{Res} f(z_k)$ は $f(z)$ の $z = z_k$ における留数である.

(1) 関数

$$f(z) = \frac{z}{(z-\alpha)^2}$$

の留数 $\mathrm{Res} f(\alpha)$ を求めよ.

(2) (1) の関数 $f(z)$ について

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res} f(\alpha)$$

が成り立つことを確かめよ.

12.3 留数定理を用いた複素積分

次の積分を留数定理を用いて計算せよ. ただし積分路はすべて正の向きにとるものとする.

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(3z-i)}$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(2z-1)(3z-2)}\, dz$

(3) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^4-1}$

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^5+32}$

(5) $\displaystyle\oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^5+32}$

12.4 留数定理を用いた実関数の積分 (1)

実関数 $f(\cos\theta, \sin\theta)$ は $\cos\theta, \sin\theta$ の有理関数で, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で連続とする. このとき以下の積分について考える.

$$I_R = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta. \tag{12.3}$$

上記の積分は, $z = e^{i\theta}$ とおき,

$$I_R = \frac{1}{i}\oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{z}$$

と表される. ここで C は複素平面上の原点を中心とする単位円に沿って正の向きに一周する経路である. コーシーの積分定理と留数定理から, 上記の積分は

$$I_R = \begin{cases} 0 & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \mathrm{Res}\,[f/z]_{z=z_n} & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_n は C 内における f/z の極である. この結果を利用して以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} \quad (a > b > 0)$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + b\cos\theta}\, d\theta \quad (a > b > 0)$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1 - 2a\cos 2\theta + a^2}\, d\theta \quad (1 > a \geq 0)$

12.5 留数定理を用いた実関数の積分 (2)

実関数 $f(x)$ が x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数よりも 2 以上大きいとする このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{12.4}$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)\, dz$$

と表される. ここで z は複素数で, C は図 12.1 のように実軸上の線分 $-R \leq x \leq R$ と, 原点を中心とする半径 R の上半円 Γ に沿って正の向きに一周する経路である. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \text{Res } f(z_k) & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である (Im $z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx$

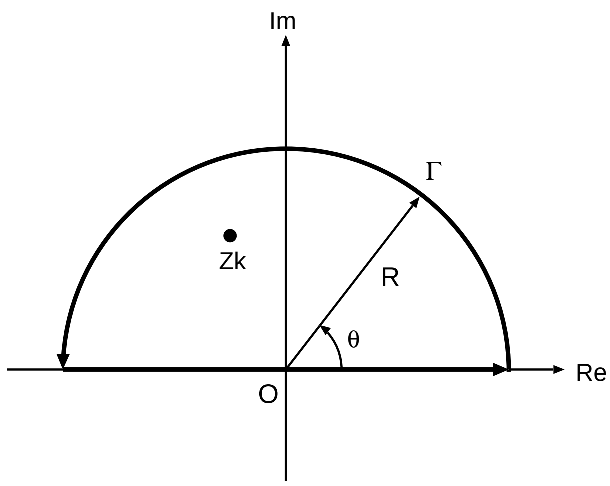

図 12.1:

12.6 留数定理を用いた実関数の積分 (3)

実関数 $f(x)$ は x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数より 1 以上大きいとする. このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx \quad (a > 0) \tag{12.5}$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z) e^{iaz}\, dz$$

と表されることを示せ. ここで z は複素数で, C は図 12.1 に示した積分路とする. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z)e^{iaz} \text{が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\left[f(z)e^{iaz}\right]_{z=z_k} & f(z)e^{iaz} \text{が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である (Im $z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{a^2 + b^2}\, dx \quad$ (a, b は実定数)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4 + a^4}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin bx}{x^4 + a^4}\, dx \quad$ (a, b は正の実定数)

付録: コーシーの積分公式の応用

コーシーの積分公式を用いて正則関数について重要な性質が得られる. ここではその解説を行う.

リュービルの定理

$|z| < \infty$ で $f(z)$ は正則な関数とする. このとき $|f(z)| < M$ を満たす実数 M が存在するならば, $f(z)$ は定数である.

証明 仮定より $|f(z)| < M$ となる M が存在する. コーシーの積分定理から, 任意の点 z_0 に対し

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta$$

がなりたつ. ここで積分路 C として原点中心の半径 R の円をとる. z_0 はその内部とする. よって,

$$\begin{aligned}
|f(z_0) - f(0)| &= \frac{|z_0|}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta\right| \\
&= \frac{|z_0|}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\theta\right| \\
&< \frac{|z_0|M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\zeta - z_0|}\, d\theta.
\end{aligned}$$

途中で $d\zeta = iRe^{i\theta}\, d\theta$ を用いた.

ここで, $|z_0| < R/2$ となるように R をとると,

$$|\zeta - z_0| \leq |\zeta| - |z_0| = R - z_0 > R/2$$

となる. 以上の 2 つの関係式から,

$$|f(z_0) - f(0)| < \frac{2M|z_0|}{R}$$

となる. $M, |z_0|$ は有限であるから

$$\lim_{R\to\infty} |f(z_0) - f(0)| = 0$$

となる. これは $f(z) = f(0)$ であること, すなわち $f(z)$ は定数であることを示す.

代数学の基本定理

任意の複素定数 $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0$ を係数とする n 次方程式 $(n \leq 1)$

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_n =\neq 0)$$

は, 少なくとも 1 つの解を持つ.

証明 これは背理法を用いて証明される. $f(z) = 0$ が解を持たないとする. このときあらゆる z に対し $f(z) \neq 0$ が成り立つ. したがって

$$g(z) \equiv \frac{1}{f(z)}$$

は $|z| < \infty$ で正則かつ有界である. なぜならば $|z| < \infty$ で $f(z)$ は有限 (発散しない) で,

$$\lim_{|z| \to \infty} g(z) = 0$$

だからである. したがってリュービルの定理より $g(z)$ は定数でなければならない. すなわち $f(z)$ は定数である. しかしこの結果は $\alpha_n \neq= 0$ とした仮定に矛盾する.

これより $f(z) = 0$ は少なくとも 1 つの解を持つ.

$f(z) = 0$ の 1 つの解を ξ_1 とすると, 多項式 $f(z)$ は

$$f(z) = (z - \xi_1) f_1(z)$$

と表される. ここで新たに現れた $f_1(z)$ についても代数学の基本定理から少なくとも 1 つの解 ξ_2 を持つので, $f(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) f_3(z)$ と表される. これを繰り返すと $f(z)$ は完全に因数分解することができ,

$$f(z) = \alpha_n \Pi_{i=1}^{n} (z - \xi_i)$$

と書ける. したがって $f(z) = 0$ は n 個の解 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ を持つことがわかる.

$f(z)$ が多重根をもつ場合は

$$f(z) = \alpha_n (z - \xi_1)^{n_1} (z - \xi_2)^{n_2} \cdots (z - \xi_k)^{n_k}$$

と表される. ここで n_i は解の多重度を表し, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ である.

複素関数 $f(z)$ が与えられ, $f(z) = 0$ を満たす点 z を $f(z)$ の**零点**と呼ぶ. とくに $z = \xi$ が $f(z) = 0$ の k 重根であるとき, ξ は $f(z)$ の k **位の零点**と呼ぶ.

最大値および最小値の定理

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C 上およびその内部で正則, かつ定数でないとすると, $|f(z)|$ は C の内部で最大値をとることはない.
また C の内部で $f(z) \neq 0$ ならば, $|f(z)|$ は C の内部で最小値をとらない.

証明 背理法を用いて証明する. C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最大値を持つとする. 正則性より $f(z)$ は連続であるから z_0 を中心とする微小半径 ε の円周上 Γ において

$$|f(z+\varepsilon e^{i\theta})| < |f(z_0)|$$

が成り立つ. 一方でコーシーの積分公式より,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})|\,d\theta \end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定より,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,d\theta \\ &= |f(z_0)| \end{aligned}$$

となる. これは矛盾した結果であるので, C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最大値を持つという仮定に誤りがあることを示している. これより定理の前半は証明される.

後半も同様に証明する. C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最小値を持つとする. $f(z) \neq 0$ より,

$$\left|\frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}\right| < \left|\frac{1}{f(z_0)}\right|$$

が成り立つ. 一方でコーシーの積分公式より,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{f(z_0)}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1/f(z)}{z-z_0}\,dz\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}\,d\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}\right|\,d\theta \end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定より,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(z_0)}\right| &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{f(z_0)}\right| d\theta \\
&= \left|\frac{1}{f(z_0)}\right|
\end{aligned}
$$

となる. これは矛盾した結果であるので, C 内の点 z_0 で $|f(z)|$ が最小値を持つという仮定に誤りがあることを示している.