2.1 ベクトルの内積

2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **内積** (inner product) は, それぞれ以下のように定義される.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

ここで a_i, b_i はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分である.

(1) 以下が成り立つことを確認せよ. ただし $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_i = a_i + b_i$ とする.

i) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

ii) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

iii) $\boldsymbol{a} \cdot \alpha\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(2) r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立であり, $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ が 1 次従属である場合, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_j$ の 1 次結合で表されることを示せ.

(3) 1 次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ から, 正規直交系 (大きさが 1 で互いに直交するベクトル) を作れ.

(4) 三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

を証明せよ.

2.2　座標軸の回転

3 次元直交座標系における回転について考える．回転とは次の 2 つのいずれかの操作を意味する

i) 座標軸は固定し, 原点のまわりに空間内の点を回転させる,

ii) 点は固定し，座標軸を原点の周りに回転させる．

ここでは ii) の座標軸の回転を考えることにする．

回転前の 3 つの直交座標軸 $1, 2, 3$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転後 (すべてプライム $'$ をつけて表す) の直交座標軸 $1', 2', 3'$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ で表す．このとき位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ はそれぞれの座標系において,

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3$$

と表される．

(1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に書けることを示せ. この行列は回転行列と呼ばれる．

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{但し } a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

ここで $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ はベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の内積を表す.

(2) 次の各軸の周りに角度 θ それぞれ右ねじ回転するときの回転行列 $R_3(\theta)$, $R_2(\theta)$，$R_1(\theta)$ の表式をそれぞれ求めよ．

1) 第 3 軸　　2) 第 2 軸　　3) 第 1 軸

(3) 回転行列 $R_3(\theta)$，$R_2(\theta)$，$R_1(\theta)$ は互いに交換可能かどうかを調べよ．

2.3 ベクトルの内積と外積

3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分をそれぞれ $a_i, b_i (i = 1 \sim 3)$ とする. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の **外積** (outer product, vector product) は, 添字について**アインシュタインの規約**[1]に従うとすると以下のように与えられる.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\varepsilon_{1ij} a_i b_j, \varepsilon_{2ij} a_i b_j, \varepsilon_{3ij} a_i b_j) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_k.$$

ここで θ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角, $\boldsymbol{e}_k$ は ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって張られる平面に垂直なベクトルで, その向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へと右まわりに進むねじの方向にとる. ε_{ijk} は**エディントンのイプシロン**で, 以下のように定義される.

i	j	k	ε_{ijk}
1	2	3	1
2	3	1	1
3	1	2	1
1	3	2	-1
3	2	1	-1
2	1	3	-1
			0

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ となること示せ.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ となることを示せ (スカラー 3 重積).

(3) スカラー 3 重積の幾何学的な意味を説明せよ.

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ となることを示せ (ベクトル 3 重積).

[1]同じ添字が 2 つ以上現れた場合にはその添字について和をとる, というもの.

2.4 ベクトルの微分

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とする. このときベクトル $\boldsymbol{a}$ の導関数は以下のように与えられる.

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+h) - \boldsymbol{a}(t)}{h} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}\right).$$

このとき以下が成り立つことを示せ. ここでベクトル $\boldsymbol{a}$ と同様に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ とする.

(1)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

2.5 ベクトルの積分

変数 t のベクトル関数があり, その微分が $\boldsymbol{a}(t)$ であるとき, もとのベクトル関数を $\boldsymbol{a}(t)$ の不定積分といい,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt$$

と表す.

$\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \boldsymbol{a}(t)$ ならば,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt = \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{c}$$

である. ここで $\boldsymbol{c}$ は t に依存しない任意のベクトル関数である.

(1) 次の不定積分を求めよ. ただし $|\boldsymbol{a}(t)| = a(t)$ とする

(i) $\displaystyle\int \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\,dt$

(ii) $\displaystyle\left(\int \boldsymbol{a}\times\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right)\,dt$

(ii) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{\boldsymbol{a}}{a^2}\right)\,dt$

ベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t)$ の定義域を $[t_0, T]$ とする. 区間 $[t_0, T]$ を N 個の小区間に分割し, 各区間の長さを Δt_i $(i = 1, 2, \cdots N)$, 各区間における任意の t の値に対する $\boldsymbol{a}(t)$ の値を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N$ とする. このとき

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

を $N \to \infty$ としたときの極限値が存在する場合, これを $t = t_0$ から T へ至る $\boldsymbol{a}(t)$ の定積分といい,

$$\int_{t_0}^{T} \boldsymbol{a}(t)\,dt \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

と表す.

(2) 時間 t とともに位置と速度を変えながら運動する質点を考える. 質点の位置を $\boldsymbol{r}(t)$, 速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とするとき, 時刻 t_0 から t_1 に至るまでの質点の変移は

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0)$$

となることを示せ ($d\boldsymbol{r}(t)/dt = \boldsymbol{v}(t)$ であることに注意せよ).

2.6 角速度

ある軸のまわりに剛体が一定の角速度 ω で回転しているときの剛体内の点 P の速度 $\boldsymbol{v}$ を, 以下の手順に沿って解析的に求めてみよう.

回転軸の方向余弦を $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (c_1, c_2, c_3)$ とする. この回転軸に沿った微小回転により, (x, y, z) 座標系が (x', y', z') 座標系に変化し, 基底ベクトルも $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ から $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ へ変化する. 基底ベクトルの変移を $d\boldsymbol{e}'_i \equiv \boldsymbol{e}'_i - \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とし,

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{e}'_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}'_1 + a_{12}\boldsymbol{e}'_2 + a_{13}\boldsymbol{e}'_3, &(2.1)\\
d\boldsymbol{e}'_2 &= a_{21}\boldsymbol{e}'_1 + a_{22}\boldsymbol{e}'_2 + a_{33}\boldsymbol{e}'_3, &(2.2)\\
d\boldsymbol{e}'_3 &= a_{31}\boldsymbol{e}'_1 + a_{32}\boldsymbol{e}'_2 + a_{33}\boldsymbol{e}'_3 &(2.3)
\end{aligned}
$$

と表すことにする.

(1) $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ に成り立つ直交関係

$$
\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}
$$

を微分することにより, 以下の等式が成り立つことを示せ.

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{e}'_i \cdot d\boldsymbol{e}'_j = 0 \quad (i = j)\\
d\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j + \boldsymbol{e}'_i \cdot d\boldsymbol{e}'_j = 0 \quad (i \neq j)
\end{gathered}
$$

(2) 式 (2.1), (2.2), (2.3) にそれぞれ $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ との内積をとることより, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$
a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0,
$$

$$
a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{23} + a_{32} = 0, \quad a_{31} + a_{13} = 0.
$$

これより 9 個の a_{ij} のうち独立なものは 3 つだけとなる. $a_1 \equiv a_{23} = -a_{32}$, $a_2 \equiv a_{31} = -a_{13}$, $a_3 \equiv a_{12} = -a_{21}$ と置き直すと, 式 (2.1), (2.2), (2.3) はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{e}'_1 &= a_3\boldsymbol{e}'_2 - a_2\boldsymbol{e}'_3,\\
d\boldsymbol{e}'_2 &= -a_3\boldsymbol{e}'_1 + a_1\boldsymbol{e}'_3,\\
d\boldsymbol{e}'_3 &= a_2\boldsymbol{e}'_1 - a_1\boldsymbol{e}'_2
\end{aligned}
$$

となる. $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ の差は非常に小さいので, 高次の微小量を無視すると,

$$d\boldsymbol{e}'_1 = a_3\boldsymbol{e}_2 - a_2\boldsymbol{e}_3, \quad (2.4)$$
$$d\boldsymbol{e}'_2 = -a_3\boldsymbol{e}_1 + a_1\boldsymbol{e}_3, \quad (2.5)$$
$$d\boldsymbol{e}'_3 = a_2\boldsymbol{e}_1 - a_1\boldsymbol{e}_2 \quad (2.6)$$

と表すことができる.

(3) 回転前の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると, (x, y, z) 座標系と (x', y', z') 座標系は一致するので,

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y\boldsymbol{e}'_2 + z\boldsymbol{e}'_3.$$

となる. 回転後は (x, y, z) 座標系では位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} = (x + dx)\boldsymbol{e}_1 + (y + dy)\boldsymbol{e}_2 + (z + dz)\boldsymbol{e}_3$$

となる. これを (x', y', z') 座標系で見ると,

$$\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} = x'(\boldsymbol{e}'_1 + d\boldsymbol{e}'_1) + y'(\boldsymbol{e}'_2 + d\boldsymbol{e}'_2) + z'(\boldsymbol{e}'_3 + d\boldsymbol{e}'_3)$$

となる. 回転後のそれぞれの座標系での位置ベクトルの表現を比較することから, 座標の変化は

$$dx = a_2z' - a_3y',$$
$$dy = a_3x' - a_1z',$$
$$dz = a_1y' - a_2x'$$

となることを示せ (ヒント: 式 (2.4), (2.5), (2.6) を用いる).

(x, y, z) と (x', y', z') の差は非常に小さいので, 高次の微小量を無視すると, 上記の結果は

$$dx = a_2z - a_3y,$$
$$dy = a_3x - a_1z,$$
$$dz = a_1y - a_2x$$

とすることができる. 明らかに $x : y : z = a_1 : a_2 : a_3$ となるような直線上では $dx = dy = dz = 0$ である. よって回転軸の方向余弦が (c_1, c_2, c_3) のときの回転による座標変化は

$$dx = c_2z - c_3y, \quad (2.7)$$
$$dy = c_3x - c_1z, \quad (2.8)$$
$$dz = c_1y - c_2x \quad (2.9)$$

と表される.

(4) 上記の回転による座標変化が微小時間 dt の間に生じたとしよう. このとき式 (2.7),(2.8),(2.9) より,

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{c_2}{dt}z - \frac{c_3}{dt}y, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{c_3}{dt}x - \frac{c_1}{dt}z, \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{c_1}{dt}y - \frac{c_2}{dt}x
\end{aligned}
$$

となる. ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を

$$
\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left(\frac{c_1}{dt}, \frac{c_2}{dt}, \frac{c_3}{dt}\right)
$$

と定義すると, 点 P の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$
\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}
$$

と表されることを示せ.