3.1 中心力場の運動

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて一般に

$$\boldsymbol{F} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は r のみによって決まる関数である.
このとき中心力の場の中で運動する物体について, 面積速度

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

は時間によらす一定であることを示せ.

3.2 質点系の運動エネルギーと角運動量

n 個の質点からなる系を考える. 各質点の質量を $m_i(i = 1 \cdots n)$, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(i = 1 \cdots n)$ とする.

(1) 系の全運動エネルギー T_{all} は

$$T_{all} = \frac{1}{2}m\overline{\boldsymbol{v}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\boldsymbol{v}_i - \overline{\boldsymbol{v}})^2$$

と表されることを示せ. ここで m は系の全質量, $\overline{r}$ は重心の位置ベクトル, $\overline{\boldsymbol{v}}$ は重心の速度である.

(2) i 番目の質点の運動方程式は

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{i,ex} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{ij}$$

とする. ここで $\boldsymbol{f}_{i,ex}$ は i 番目の質点に働く外力, $\boldsymbol{f}_{ij}$ は j 番目の質点が i 番目の質点に及ぼす内力で $\boldsymbol{f}_{ii} = 0$ である. このとき系の全角運動量 $\boldsymbol{L}_{all}$ の時間変化は

$$\frac{d\boldsymbol{L}_{all}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_{i,ex}, \quad \boldsymbol{N}_{i,ex} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{i,ex}$$

となることを示せ.

3.3 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. だたし $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\
\frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3
\end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.

3.4 スカラーの勾配

座標 x, y, z の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 (x, y, z) における f の**勾配** (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad}\ f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{3.1}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は i 方向の単位ベクトルである. grad はグラジュエント, もしくはグラッドと発音する. (3.1) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad}\ f = \nabla f$$

と表される.

(1) 固定点 P から一定の微小距離 dr だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 f の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における ∇f に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$ としてみよ).

(2) ∇f は $f =$ 一定 の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.

(3) g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

(i) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g$

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(iii) $\nabla\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2}$

(iv) $\nabla f(g) = \dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

3.5 ベクトルの発散

各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\boldsymbol{A} = a_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + a_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + a_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

を考える (このとき $\boldsymbol{A}$ をベクトル場と呼ぶ). $\boldsymbol{A}$ の**発散** (divergence, ダイバージェンス) は以下のように定義される.

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{3.2}$$

(1) $\varphi = \varphi(x,y,z)$ をスカラー関数とすると,

$$\mathrm{div} \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}\ \varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \mathrm{div} \cdot \boldsymbol{A}$$

となることを示せ.

(2) スカラー関数 φ に対し,

$$\mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\ \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

となることを示せ.

div (grad φ) は $\nabla\cdot(\nabla\varphi), \nabla^2\varphi$ 等とも表す. とくに ∇^2 を記号 Δ で表し, これをラプラス演算子と呼ぶ.

3.6 ベクトルの回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し, その**回転** (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{3.3}$$

行列式の形で書けば,

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

(1) rot$\boldsymbol{A}$ の第 i 成分をエディントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.

(2) スカラー関数 φ に対し rot (grad φ) $= 0$ となることを示せ.

(3) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$ となることを示せ.

(4) rot $(\varphi \boldsymbol{A}) =$ (grad φ) $\times \boldsymbol{A} + \varphi$rot $\boldsymbol{A}$ となることを示せ.