4.1　発散・回転の物理的解釈

(1) 3 次元空間内の**定常な流れ**を考える. このとき空間内の各点の速度場は $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ で与えられる. 流れ場中に空間内のある一点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を頂点にもち, 角辺が x, y, z 軸に平行でその長さが (dx, dy, dz) である微小直方体を置く. この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は, 近似的に

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})_{\mathrm{P}} \times dxdydz$$

と表されることを示せ. ここで $(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})_{\mathrm{P}}$ は点 P における $\boldsymbol{v}$ の発散を表す.

(2) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 Ω で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする. $\boldsymbol{r}$ における速度を $\boldsymbol{v}$ とするとき, rot $\boldsymbol{v}$ を計算せよ.

4.2　∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x, y, z)$, $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla\times\boldsymbol{B})$

(4) $\nabla\times(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

(5) $\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(6) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

4.3 ベクトル場の線積分

空間内の領域 D において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

と D 内の無限小変移 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{e}_1 + dy\boldsymbol{e}_2 + dz\boldsymbol{e}_3$ との内積を, 経路 C に沿って積分したもの

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C a_1(x,y,z)\,dx + a_2(x,y,z)\,dy + a_3(x,y,z)\,dz \tag{4.1}$$

をベクトル $\boldsymbol{A}$ の C に沿う **線積分** と呼ぶ.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_C (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r} = \alpha\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \beta\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

(ii)

$$\int_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで経路 $-C$ は経路 C を逆向きにたどる経路である.

(2) スカラー場 φ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\varphi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

4.4 ベクトル場の面積分

空間内の領域 D 内の曲面 S を含む領域において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の **面積分** を以下のように定義する.

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S a_1n_1(x,y,z) + a_2n_2(x,y,z) + a_3n_3(x,y,z)\,dS. \quad (4.2)$$

ここで $d\boldsymbol{S}, dS$ はそれぞれ曲面 S 上の **ベクトル面積素** と**面積素**, $\boldsymbol{n}$ は面積素 dS の **法線ベクトル** で, n_i はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \alpha\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \beta\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

ここで $-S$ は S の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2) $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を, S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(i) 単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(ii) 平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm, 1$ で囲まれる立方体の表面.

4.5 ガウスの定理

一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える. このとき,

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV \tag{4.3}$$

が成り立つ. これを **ガウスの定理** と呼ぶ.

(1) 密度 $\rho(x,y,z,t)$ である流体が速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ で運動しているとする. 流体のわきだしも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{4.4}$$

(2) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱エネルギー (熱フラックス) $\boldsymbol{q}$ (J m^{-2} sec^{-1}) は

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{4.5}$$

と表される. ここで T は物体の温度, k は **熱伝導率** (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を**熱伝導** と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\nabla^2 T. \tag{4.6}$$

ここで κ は **熱拡散率** (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c を用いて $\kappa = k/\rho c$ と表される.

4.6 ストークスの定理

一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. このとき,

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{4.7}$$

が成り立つ. これを **ストークスの定理** と呼ぶ. ただし法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

(1) 閉曲線 C に沿って発生する磁場を $\boldsymbol{H}$ とすると, アンペールの法則から

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = I$$

が成り立つ. ここで I は C によって囲まれた曲面 S を通過する全電流である. 電流密度ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とすると $I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ と表されることを用いて, 微分形のアンペールの法則

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{4.8}$$

を求めよ.

(2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を $\boldsymbol{E}$ とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成り立つ. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. 磁束密度を $\boldsymbol{B}$ とすると $\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ と表されることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{4.9}$$

を求めよ.