9.1 コーシー・リーマンの定理

(1) 領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x,y), v(x,y)$ とする ($z = x + iy, z \in D$). u, v が連続で，かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.1}$$

を満たすならば，関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の必要条件の証明).

(2) 複素関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ($z = x + iy$) が正則であるならば, 実関数 $u(x,y), v(x,y)$ は式 (9.1) を満たすことを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の十分条件の証明).

コーシー・リーマンの微分方程式 (9.1) を変形すると, $u(x,y), v(x,y)$ の満たす式として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が得られる. これらは 2 次元のラプラス方程式である. ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれる. コーシー・リーマンの微分方程式 (9.1) の関係を満たすような調和関数の組を, **違いに共役な調和関数**という.

(3) $u(x,y) = e^x \sin y$ は調和関数であることを確かめよ.

(4) 上記の u に共役な調和関数 $v(x,y)$ を求めよ.

9.2 複素関数の正則性

以下の複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) の関数 $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}\,(\cos x + i\ \sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$

9.3 有理関数の極と特異点

次の関数 $f(z)$ の特異点 z_0 を求め, それが極であるならばその位数 k と極限値

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$$

を求めよ.

(1) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

(2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

(3) $f(z) = \dfrac{z^3-z^2}{z^2+1}$

(4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$

(5) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3-z^2-z+1}$

(6) $f(z) = \dfrac{2z-1}{z^2+3z+2}$

(7) $f(z) = \dfrac{1-z^n}{1-z}$ (n は 正の整数)

(8) $f(z) = c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z^k}$ (k は正の整数)