解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

オイラーの公式, ド・モアブルの公式を用いて

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

が成り立つことを示せ.

問題 2

(1) h を偏角一定の複素数とする. $f(z) = z^n$ の場合, 極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が偏角の値によらず nz^{n-1} に収束することを示せ.

(2) n を自然数とする. このとき

$$f(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

の $z = 1$ における微分可能性を調べよ. ただし $f(1) = n + 1$ とする.

問題 3

z を複素数とする. ド・ロピタルの公式を用いて以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}$

(2) $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2}\frac{\cos z}{z-\pi/2}$

(3) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{z}$

(4) $\displaystyle\lim_{z\to 3\pi i}\frac{z-3\pi i}{\sinh z}$

問題 4

(1) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z\in\boldsymbol{C}$). このとき, コーシーの積分定理を用いて,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\oint_{C_2} f(z)\,dz \tag{4.1}$$

が成り立つこと示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

(2) (1) の結果を用いて, 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とする半径 2 の円を反時計周りに一周するものとする.

(i) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$

(ii) $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^2+1}\,dz$

問題 5

(1) 次の積分を留数定理を用いて計算せよ. ただし積分路はすべて正の向きにとるものとする.

(i) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^4-1}$

(ii) $\displaystyle\oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^5+32}$

(2) 実関数 $f(x)$ が x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数よりも 2 以上大きいとする このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{5.1}$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)\,dz \tag{5.2}$$

と表される. ここで z は複素数で, C は図 1 のように実軸上の線分 $-R \leq x \leq R$ と, 原点を中心とする半径 R の上半円 Γ に沿って正の向きに一周する経路である. これを用いて以下の積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

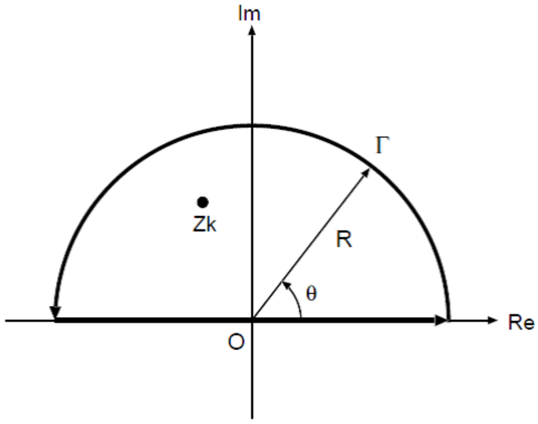

図 1: 問題 5 (2) における積分路 C