解答上の注意

1. 問題用紙 3 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

(4) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

問題 2

空間内の領域 D 内の曲面 S を含む領域において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の **面積分** を以下のように定義する.

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S a_1n_1(x,y,z) + a_2n_2(x,y,z) + a_3n_3(x,y,z)\,dS. \quad (0.1)$$

ここで $d\boldsymbol{S}, dS$ はそれぞれ曲面 S 上の **ベクトル面積素** と **面積素**, $\boldsymbol{n}$ は面積素 dS の **法線ベクトル** で, n_i はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \alpha\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \beta\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_{S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

ここで $-S$ は S の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2) スカラー場 φ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\varphi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

問題 3

座標 $\boldsymbol{r}$ を直交直線座標 (x, y, z) に代わる 3 つの変数 (u, v, w) で表す場合を考える. u, v, w はともに x, y, z の関数である. 球座標 (r, θ, ϕ) では

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

である.

(1) 直交直線座標と球座標の幾何学的関係を図示し, (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ.

(2) 一般に曲線座標 (u, v, w) において v, w を固定して u を変化させた時に座標 $\boldsymbol{r}$ が描く軌跡のことを u 曲線と言う. その接ベクトル $\boldsymbol{r}_u$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{e}_z$$

v, w 曲線およびその接ベクトル $\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_w$ は同様に定義される. 球座標における接ベクトル $\boldsymbol{r}_r, \boldsymbol{r}_\theta, \boldsymbol{r}_\phi$ を $r, \theta, \phi, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ. ここで $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は (x, y, z) 方向の単位ベクトルである.

(3) 球座標においてスケール因子 h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ.

(4) 直交曲線座標系 (u, v, w) における発散の表現は, 座標 u, $u+\Delta u$, v, $v+\Delta v$, w, $w+\Delta w$, 一定の面で囲まれた微小 6 面体についてガウスの定理

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$$

を考えることで求めることができる. これを用いて球座標における発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の表現を求めよ.

(3) 直交曲線座標系 (u, v, w) における回転の u 成分は, 座標 u 一定の面上での v, $v+\Delta v$, w, $w+\Delta w$, 一定の 4 本の曲線で囲まれた面 S について, ストークスの定理

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\,dS = \oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を考えることで求めることができる. これを用いて球座標における回転の r 成分 $(\nabla\times\boldsymbol{A})_r$ の表現を求めよ.

問題 4

熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱エネルギー (熱フラックス) $\boldsymbol{q}$ (J m^{-2} sec^{-1}) は

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T$$

と表される. ここで T は物体の温度, k は **熱伝導率** (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を**熱伝導** と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\nabla^2 T.$$

ここで κ は **熱拡散率** (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c を用いて $\kappa = k/\rho c$ と表される.