

12.1 コーシーの積分公式 (1)

(1) 次の積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とし内部に $z = \pi/2$ を含む円を反時計周りに 1 周するものとする.

$$\text{i) } \oint_C \frac{\sin z}{z} dz$$

$$\text{ii) } \oint_C \frac{1 - \cos z}{z} dz$$

$$\text{iii) } \oint_C \frac{\sin z}{z(z - \pi)/2} dz$$

$$\text{iv) } \oint_C \frac{1 - \cos z}{z(z - \pi/2)} dz$$

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ に対し積分 $\oint_C \frac{f(z)}{z} dz$ を求めよ. ただし積分路 C は原点と $f(z)$ の全ての特異点を含む閉曲線を反時計周りに 1 周するものとする.

$$\text{i) } f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2 - 1}$$

$$\text{ii) } f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$$

$$\text{iii) } f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}$$

$$\text{iv) } f(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} + 1} \quad (|z| < 1/2)$$

12.2 コーシーの積分公式 (2)

複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$$

を考える. ここで a, b は実定数で $a > 0, b > 0$ とする.

(1) Fig.12.3 の積分路 C, C_+ について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_+} f(z) dz = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

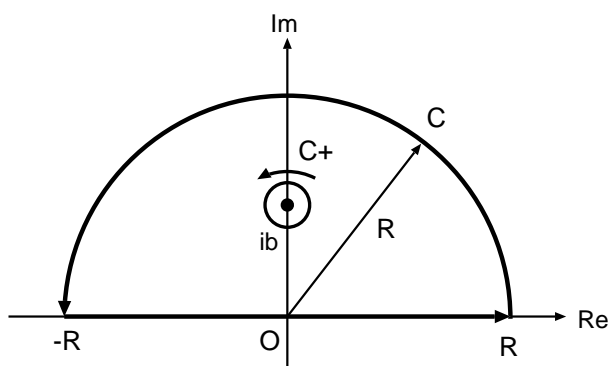


Figure 12.1: 積分路 C と C_+

(2) Fig.12.3 の積分路を実軸について対称の位置に変換して得られる積分路 C', C_- (Fig.12.2) について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_-} f(z) dz = \frac{e^{ab}}{2ib}$$

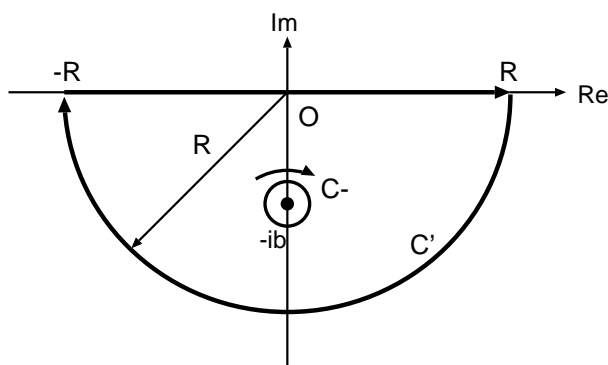


Figure 12.2: 積分路 C' と C_-

12.3 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, $f(z)$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (12.1)$$

と表される.

(1) $f(z) = z^2$ とする. 以下の周回積分

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

を求め, それぞれが $f(z), f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z)$ に等しいことを示せ. ここで積分路 C は点 z を正の向きに一周する閉曲線とする.

(2) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とすると, 次の式が成り立つことを示せ.

$$(i) \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

$$(ii) \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2 + 1} dz = \cos t$$

12.4 留数定理

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C 上で連続, C で囲まれた領域 D 上で n 個の特異点 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) を持ち, それらの点以外では正則であるとき,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}f(z_k) \quad (12.2)$$

が成り立つ. ここで $\text{Res}f(z_k)$ は $f(z)$ の $z = z_k$ における留数である.

(1) 関数

$$f(z) = \frac{z}{(z - \alpha)^2}$$

の留数 $\text{Res}f(\alpha)$ を求めよ.

(2) (1) の関数 $f(z)$ について

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}f(\alpha)$$

が成り立つことを確かめよ.

12.5 留数定理を用いた複素積分

次の積分を留数定理を用いて計算せよ. ただし積分路はすべて正の向きにとるものとする.

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(3z-i)}$$

$$(2) \oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(2z-1)(3z-2)} dz$$

$$(3) \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^4-1}$$

$$(4) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^5+32}$$

$$(5) \oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^5+32}$$

12.6 留数定理を用いた実関数の積分 (1)

実関数 $f(\cos \theta, \sin \theta)$ は $\cos \theta, \sin \theta$ の有理関数で, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で連続とする. このとき以下の積分について考える.

$$I_R = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta. \quad (12.3)$$

上記の積分は, $z = e^{i\theta}$ とおき,

$$I_R = \frac{1}{i} \oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{z}$$

と表される. ここで C は複素平面上の原点を中心とする単位円に沿って正の向きに一周する経路である. コーシーの積分定理と留数定理から, 上記の積分は

$$I_R = \begin{cases} 0 & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi \sum_{n=1}^r \text{Res} [f/z]_{z=z_n} & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_n は C 内における f/z の極である. この結果を利用して以下の積分を求めよ.

- (1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} \quad (a > b > 0)$
- (2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+b\cos\theta} d\theta \quad (a > b > 0)$
- (3) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1-2a\cos 2\theta+a^2} d\theta \quad (1 > a \geq 0)$

12.7 留数定理を用いた実関数の積分 (2)

実関数 $f(x)$ が x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数よりも 2 以上大きいとするこのとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (12.4)$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz$$

と表される. ここで z は複素数で, C は Fig.12.3 のように実軸上の線分 $-R \leq x \leq R$ と, 原点を中心とする半径 R の上半円 Γ に沿って正の向きに一周する経路である. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res } f(z_k) & f(z) \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である ($\text{Im } z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

- (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4} dx$
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

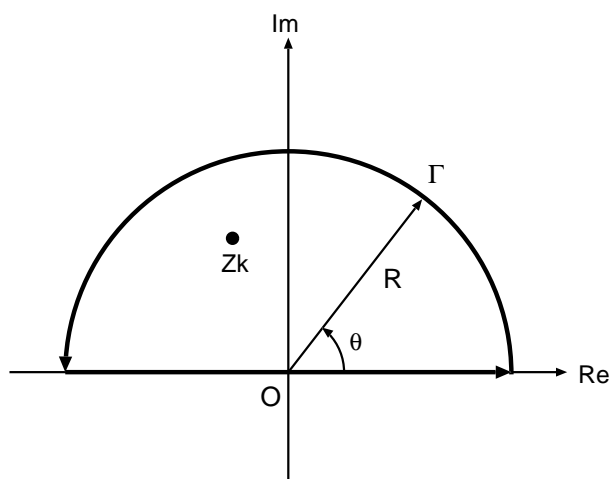


Figure 12.3:

12.8 留数定理を用いた実関数の積分 (3)

実関数 $f(x)$ は x の有理関数で, 分母の次数が分子の次数より 1 以上大きいとする. このとき以下の積分

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx \quad (a > 0) \quad (12.5)$$

は, 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z)e^{iaz} dz$$

と表されることを示せ. ここで z は複素数で, C は Fig.12.3 に示した積分路とする. コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z)e^{iaz} \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} [f(z)e^{iaz}]_{z=z_k} & f(z)e^{iaz} \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である ($\text{Im } z_k > 0$). これを用いて以下の積分を求めよ.

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{a^2 + b^2} dx \quad (a, b \text{ は実定数})$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4 + a^4} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin bx}{x^4 + a^4} dx \quad (a, b \text{ は正の実定数})$$