3.1 ベクトルの微分

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とする. このときベクトル $\boldsymbol{a}$ の導関数は以下のように与えられる.

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t+h) - \boldsymbol{a}(t)}{h} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}\right).$$

このとき以下が成り立つことを示せ. ここでベクトル $\boldsymbol{a}$ と同様に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ とする.

(1)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

3.2 ローレンツ力

電場 $\boldsymbol{E}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q を持つ荷電粒子は, 以下の式で与えられる力 $\boldsymbol{F}$ を受ける.

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

(1) $\boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{v} = (u, v, 0), \boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とする. このとき荷電粒子の運動方程式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ とする. 速度 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ で動く座標系から荷電粒子の運動を見た場合, $\boldsymbol{F}$ から電場が消えることを示せ.

(3) 上記 (2) の場合において $\boldsymbol{E} = (0, E, 0), \boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ のとき, 速度 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ の大きさと向きを示せ.

3.3 中心力場の運動

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて一般に

$$\boldsymbol{F} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は r のみによって決まる関数である.
このとき中心力の場の中で運動する物体について, 面積速度

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

は時間によらす一定であることを示せ.

3.4 質点系の運動

n 個の質点からなる系を考え, 各質点の質量を $m_i(i = 1\cdots, n)$ とする.

(1) 質点系の運動量 $\boldsymbol{P}$ は各質点の運動量のベクトル和であるとすると,

$$\boldsymbol{P} = m\overline{\boldsymbol{v}}$$

と表されることを示せ. ここで m は質点系の質量の総和, $\overline{\boldsymbol{v}}$ は重心の速度ベクトルである.

(2) 各質点に作用する力を $\boldsymbol{F}_i(i = 1\cdots, n)$ とする. 重心の加速度を $\overline{\boldsymbol{a}}$ とすると,

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\overline{a}$$

となることを示せ.

なお, 質点の間互いに作用する力は大きさが等しく反対方向であることから, $\sum_i \boldsymbol{F}_i$ を考える際には質点系に働く外力だけを考えればよいことになる.

3.5 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. ただし $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\ \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3\end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.