4.1 ベクトルの積分

変数 t のベクトル関数があり, その微分が $\boldsymbol{a}(t)$ であるとき, もとのベクトル関数を $\boldsymbol{a}(t)$ の不定積分といい,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt$$

と表す.

$\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \boldsymbol{a}(t)$ ならば,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt = \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{c}$$

である. ここで $\boldsymbol{c}$ は t に依存しない任意のベクトル関数である.

(1) 次の不定積分を求めよ. ただし $|\boldsymbol{a}(t)| = a(t)$ とする

(i) $\displaystyle\int \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\,dt$

(ii) $\displaystyle\left(\int \boldsymbol{a}\times\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right)dt$

(ii) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{\boldsymbol{a}}{a^2}\right)dt$

ベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t)$ の定義域を $[t_0, T]$ とする. 区間 $[t_0, T]$ を N 個の小区間に分割し, 各区間の長さを Δt_i $(i = 1, 2, \cdots N)$, 各区間における任意の t の値に対する $\boldsymbol{a}(t)$ の値を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N$ とする. このとき

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

を $N \to \infty$ としたときの極限値が存在する場合, これを $t = t_0$ から T へ至る $\boldsymbol{a}(t)$ の定積分といい,

$$\int_{t_0}^{T} \boldsymbol{a}(t)\,dt \equiv \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

と表す.

(2) 時間 t とともに位置と速度を変えながら運動する質点を考える. 質点の位置を $\boldsymbol{r}(t)$, 速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とするとき, 時刻 t_0 から t_1 に至るまでの質点の変移は

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0)$$

となることを示せ ($d\boldsymbol{r}(t)/dt = \boldsymbol{v}(t)$ であることに注意せよ).

4.2 スカラーの勾配

座標 x, y, z の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 (x, y, z) における f の**勾配** (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad}\ f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{4.1}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は i 方向の単位ベクトルである. grad はグラジュエント, もしくはグラッドと発音する. (4.1) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad}\ f = \nabla f$$

と表される.

(1) 固定点 P から一定の微小距離 dr だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 f の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における ∇f に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$ としてみよ).

(2) ∇f は $f =$ 一定 の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.

(3) g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

(i) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(iii) $\nabla\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2}$

(iv) $\nabla f(g) = \dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

4.3 ベクトルの発散

各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\boldsymbol{A} = a_x(x, y, z)\boldsymbol{e}_x + a_y(x, y, z)\boldsymbol{e}_y + a_z(x, y, z)\boldsymbol{e}_z$$

を考える (このとき $\boldsymbol{A}$ をベクトル場と呼ぶ). $\boldsymbol{A}$ の**発散** (divergence, ダイバージェンス) は以下のように定義される.

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{4.2}$$

(1) $\varphi = \varphi(x, y, z)$ をスカラー関数とすると,

$$\mathrm{div} \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}\ \varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \mathrm{div} \cdot \boldsymbol{A}$$

となることを示せ.

(2) スカラー関数 φ に対し,

$$\mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\ \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

となることを示せ.

div (grad φ) は $\nabla \cdot (\nabla \varphi), \nabla^2 \varphi$ 等とも表す. とくに ∇^2 を記号 Δ で表し, これをラプラス演算子と呼ぶ.

4.4 ベクトルの回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し, その**回転** (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{4.3}$$

行列式の形で書けば,

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

(1) rot$\boldsymbol{A}$ の第 i 成分をエディントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.

(2) スカラー関数 φ に対し rot (grad φ) $= 0$ となることを示せ.

(3) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$ となることを示せ.

(4) rot $(\varphi\boldsymbol{A}) =$ (grad φ) $\times \boldsymbol{A} + \varphi$rot $\boldsymbol{A}$ となることを示せ.