

5.1 発散・回転の物理的解釈

- (1) 3次元空間内の定常な流れを考える. このとき空間内の各点の速度場は $v(x, y, z)$ で与えられる. 流れ場中に空間内のある一点 $P(x, y, z)$ を頂点にもち, 角辺が x, y, z 軸に平行でその長さが (dx, dy, dz) である微小直方体を置く. この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は, 近似的に

$$(\operatorname{div} v)_P \times dx dy dz$$

と表されることを示せ. ここで $(\operatorname{div} v)_P$ は点 P における v の発散を表す.

- (2) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 Ω で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを r とする. r における速度を v とするとき, $\operatorname{rot} v$ を計算せよ.

5.2 ∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $A(x, y, z), B(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

- (1) $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$
- (2) $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$
- (3) $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$
- (4) $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A)$
- (5) $\nabla(A \cdot B) = (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A)$
- (6) $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$

5.3 ベクトル場の線積分

空間内の領域 D において定義されたベクトル場

$$\mathbf{A} = a_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + a_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + a_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$$

と D 内の無限小変移 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3$ との内積を, 経路 C に沿って積分したもの

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_1(x, y, z) dx + a_2(x, y, z) dy + a_3(x, y, z) dz \quad (5.1)$$

をベクトル \mathbf{A} の C に沿う線積分と呼ぶ.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_C (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \alpha \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \beta \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}.$$

(ii)

$$\int_{-C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

ここで経路 $-C$ は経路 C を逆向きにたどる経路である.

(2) スカラー場 ϕ の勾配ベクトル場 $\nabla\phi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\phi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

5.4 ベクトル場の面積分

空間内の領域 D 内の曲面 S を含む領域において定義されたベクトル場

$$\mathbf{A} = a_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + a_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + a_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$$

に対し、ベクトル場 \mathbf{A} の面積分を以下のように定義する.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S a_1 n_1(x, y, z) + a_2 n_2(x, y, z) + a_3 n_3(x, y, z) dS. \quad (5.2)$$

ここで $d\mathbf{S}$, dS はそれぞれ曲面 S 上のベクトル面積素と面積素, \mathbf{n} は面積素 dS の法線ベクトルで, n_i はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \alpha \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \beta \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

ここで $-S$ は S の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2) \mathbf{r} を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$$

を, S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(i) 単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(ii) 平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で囲まれる立方体の表面.

5.5 ガウスの定理

一階微分可能なベクトル場 \mathbf{A} と, \mathbf{A} が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える. このとき,

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (5.3)$$

が成り立つ. これを **ガウスの定理** と呼ぶ.

- (1) 密度 $\rho(x, y, z, t)$ である流体が速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ で運動しているとする. 流体のわきだしも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.4)$$

- (2) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱エネルギー (熱フラックス) \mathbf{q} ($\text{J m}^{-2} \text{sec}^{-1}$) は

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (5.5)$$

と表される. ここで T は物体の温度, k は熱伝導率 (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を熱伝導と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \quad (5.6)$$

ここで κ は熱拡散率 (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c を用いて $\kappa = k/\rho c$ と表される.

5.6 ストークスの定理

一階微分可能なベクトル場 A と, A が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. このとき,

$$\oint_C A \cdot dr = \int_S (\nabla \times A) \cdot n dS \quad (5.7)$$

が成り立つ. これを ストークスの定理 と呼ぶ. ただし法線ベクトル n の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

- (1) 閉曲線 C に沿って発生する磁場を H とすると, アンペールの法則から

$$\oint_C H \cdot dr = I$$

が成り立つ. ここで I は C によって囲まれた曲面 S を通過する全電流である. 電流密度ベクトルを j とすると $I = \int_S j \cdot n dS$ と表されることを用いて, 微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times H = j \quad (5.8)$$

を求めよ.

- (2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を E とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\oint_C E \cdot dr = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成り立つ. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. 磁束密度を B とすると $\Phi = \int_S B \cdot n dS$ と表されることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B \quad (5.9)$$

を求めよ.