8.1 複素数の指数関数

a, t は実数とする. このとき指数関数 e^{at} は

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots$$

と無限級数を用いて表される. ただし $0! = 1$ とする. さらに e^{at} は次の微分方程式の初期値問題,

$$\frac{df(t)}{dt} = af(t), \quad f(0) = 1,$$

の解である.

以下では a を複素数に拡張可能であるとする.

(1) オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{8.1}$$

が成り立つことを示せ. ここで θ は実数である (ヒント: $\cos\theta, \sin\theta$ のテーラー展開を利用する).

(2) 任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ となることを示せ (ヒント: e^{at} が上記の微分方程式の解であることを利用する).

8.2 オイラーの公式の利用

オイラーの公式 (8.1), ド・モアブルの公式を用いて以下の公式が成り立つことを示せ.

(1) $\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2$

(2) $\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \sin\theta_2 \cos\theta_1$

(3) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(4) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

8.3 複素数の関数

w, z を複素数とする. $w = z^2 + \alpha z$ (α は実数で $\alpha \neq 0$) と表されるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 $z = \alpha$ を通り, 虚軸に平行な直前 Γ_1 に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

(2) 点 $z = \alpha$ を通り, 実軸に平行な直前 Γ_2 に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.

(3) 点 z が z 平面上で直線 $\Gamma_3; z = (1+i)t$ ($-\infty < t < \infty$, t は実数) に沿って z が動くとき, w 平面上で w の描く軌跡を図示せよ.