10.1 有理関数の極と特異点

次の関数 $f(z)$ の特異点 z_0 を求め, それが極であるならばその位数 k と極限値

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$$

を求めよ.

(1) $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$

(2) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$

(3) $f(z)=\dfrac{z^3-z^2}{z^2+1}$

(4) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$

(5) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^3-z^2-z+1}$

(6) $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2+3z+2}$

(7) $f(z)=\dfrac{1-z^n}{1-z}$ (n は 正の整数)

(8) $f(z)=c_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z^k}$ (k は正の整数)

10.2 指数関数

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) を独立変数とする指数関数 e^z は

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

と定義される.

(1) 以下の指数関数の公式が成り立つことを示せ. ただし z_1, z_2 は複素数とする.

(a) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

(b) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

(c) $|e^z| = e^x$

(d) $e^{z+2k\pi i} = e^z \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ となることを示せ.

(3) e^{iz} の実部と虚部を求め, $\dfrac{de^{iz}}{dz} = ie^{iz}$ となることを示せ.

10.3 三角関数と双曲線関数

z を複素数, i を虚数単位とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の複素三角関数の基本公式を証明せよ.

i) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

ii) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

iv) $\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$

(2) $\cos z, \sin z$ の実部と虚部を求めよ.

(3) 次の複素双曲線関数の基本公式を証明せよ.

i) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

ii) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

iii) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

iv) $\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z$

(4) 次の等式を証明せよ.

i) $\sin(iz) = i \sinh z$

ii) $\cos(iz) = \cosh z$

iii) $\sinh(iz) = i \sin z$

iv) $\cosh(iz) = \cos z$

(5) $|\cos i| > 1$ となることを証明せよ.

10.4 ド・ロピタルの公式

z を複素数とする. このとき以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}$

(2) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}$

(4) $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2}\frac{\cos z}{z-\pi/2}$

(5) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z-\sin z}{z^3}$

(7) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{z}$

(8) $\displaystyle\lim_{z\to 3\pi i}\frac{z-3\pi i}{\sinh z}$