地球惑星科学のための物理数学 II 演習
期末試験

解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) は横軸に実数, 縦軸に虚数をとった **複素平面** (complex plane) 上のある 1 点として表現される. このとき

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

と表される. これを複素数の **極形式** という. 最後の等号関係はオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta$ を用いた. ここで $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ は z の **偏角** (argument) と呼ばれ, $\theta = \arg z$ と表される.

(1) 次の複素数を極形式で表せ.

$$i, \quad -i, \quad 1 - i, \quad 1 + \sqrt{3}i$$

(2) $z^3 = 1$ の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.

(3) 任意の自然数 n に対し $z^n = 1$ の根は複素平面上でどのような幾何学的位置にあるか.

問題 2

次の関数 $f(z)$ の特異点 z_0 を求め, それが極であるならばその位数 k と極限値

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

を求めよ.

(1) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

(2) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 - z^2 - z + 1}$

(3) $f(z) = \dfrac{2z - 1}{z^2 + 3z + 2}$

(4) $f(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$ $\quad$ (n は 正の整数)

問題 3

(1) 3 点 $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ を頂点とする三角形を正の向きに一周する閉曲線を C とする. 次の周回積分を求めよ.

$$\oint_C \bar{z}\, dz$$

(2) 点 $z = \alpha$ を中心とする半径 a の円周を正の向きに一周する閉曲線を C とする. 次の周回積分を求めよ. ただし n は整数である.

$$\oint_C (z - \alpha)^n\, dz$$

(3) 積分

$$\int_C z\, dz \quad (C : z = e^{i\theta}, 0 \le \theta < \pi/2)$$

について不等式

$$\left| \int_C z\, dz \right| < \int_C |z|\, |dz|$$

が成り立つことを示せ.

問題 4

以下の複素関数 $f(z)$ に対し積分 $\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz$ を求めよ. ただし積分路 C は原点と $f(z)$ の全ての特異点を含む閉曲線を反時計周りに 1 周するものとする.

(1) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^2 - 1}$

(2) $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}$

(3) $f(z) = \dfrac{1}{e^{2\pi i z} + 1} \quad (|z| < 1/2)$

問題 5

以下の積分を求めよ．ただし a，b は実定数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta \quad (a > b > 0)$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx$