解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 2 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

(3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

問題 2

(1) r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立であり, $r{+}1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}$ が 1 次従属である場合, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_j$ の 1 次結合で表されることを示せ.

(2) 1 次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ から, 正規直交系 (大きさが 1 で互いに直交するベクトル) を作れ.

問題 3

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1,\quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_2,\quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt}=0,$$

であることを示せ. ただし $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}',$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').$$

ここで

$$\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3,$$
$$\frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.

問題 4

(1) 密度 $\rho(x, y, z, t)$ である流体が速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ で運動しているとする. 流体のわきだしも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

(2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を $\boldsymbol{E}$ とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成り立つ. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. 磁束密度を $\boldsymbol{B}$ とすると $\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ と表されることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

を求めよ.