1.1 スカラーとベクトル

大きさだけを持つ量を **スカラー** (scalar), 方向と大きさを持つ量を**ベクトル** (vector) と呼ぶ. 以下ではスカラーを細文字のアルファベット A, ベクトルを太文字のアルファベット $\boldsymbol{A}$ 等として表す. 空間 3 次元の直交直線座標系において, 各座標軸方向の基底ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とすると, ベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

と表される. ここで A_x, A_y, A_x は $\boldsymbol{A}$ の成分である.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と x, y, z 軸とのなす角をそれぞれ α, β, γ とする. このとき

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{B}$ の成分を $\boldsymbol{A}$ と同様に B_x, B_y, B_z と表す. このとき以下のベクトルの成分を求めよ.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$$

(3) ベクトルの加法に関する交換法則

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$

および結合法則

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$$

が成り立つことを, 両辺のベクトルの成分を比較することで確かめよ.

1.2 ベクトルの成分

空間内に始点を O, 終点を P とするベクトル $\boldsymbol{A}$ と, 点 O を通る直線 s を考える. OP と s のなす角を θ とし, OP を s へ射影した長さを OP' とする. θ が鋭角か鈍角かによって OP' に符号をつけたものを A_s とすると,

$$A_s = A\cos\theta$$

となる. これを $\boldsymbol{A}$ の s 方向成分という.

(1) 直線 s の方向余弦を λ, μ, ν とすると,

$$A_s = A_x\lambda + A_y\mu + A_z\nu$$

と表されることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和を $\boldsymbol{C}$ とする. このとき,

$$C_s = A_s + B_s$$

となることを示せ. ここで, A_s, B_s, C_s はそれぞれ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の s 方向成分である.

1.3 位置ベクトル

定点 O からある点 P に向かうベクトル OP を, 点 P の位置ベクトルという.

(1) 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする. このとき AB 間を $m:n$ に内分する点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) 点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とする. このとき三角形 ABC の重心 G の位置ベクトル $\boldsymbol{g}$ を求めよ.

1.4 直線と平面のベクトル方程式

点 A, B の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする. A, B を通る直線上の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は, パラメータ t を用いて

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

すなわち

$$\boldsymbol{r} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$$

と表される.

(1) 点 C の位置ベクトルを $\boldsymbol{c}$ とする. 点 A, B, C が一直線上にある場合,

$$l\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{c} = 0, \quad l + m + n = 0$$

となるような同時にゼロとならない実数 l, m, n が存在することであることを示せ.

(2) 角 AOB の二等分線上の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は, パラメータ t を用いて

$$\boldsymbol{r} = t\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)$$

となることを示せ.

原点を通り, ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ に平行な平面上の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は, パラメータ s, t を用いて.

$$\boldsymbol{r} = s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$$

と表される.

(3) 点 A, B, C を通る平面上の位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r} = (1-s-t)\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c}$$

と表されることを示せ.