5.1 ベクトルの回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し, その**回転** (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{5.1}$$

行列式の形で書けば,

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

(1) rot$\boldsymbol{A}$ の第 i 成分をエディントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.

(2) スカラー関数 φ に対し rot (grad φ) $= 0$ となることを示せ.

(3) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$ となることを示せ.

(4) rot $(\varphi\boldsymbol{A}) =$ (grad φ) $\times \boldsymbol{A} + \varphi$rot $\boldsymbol{A}$ となることを示せ.

(5) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 Ω で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする. $\boldsymbol{r}$ における速度を $\boldsymbol{v}$ とするとき, rot $\boldsymbol{v}$ を計算せよ.

5.2 ∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x, y, z)$, $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$

(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla\times\boldsymbol{B})$

(3) $\nabla\times(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

(4) $\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(5) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

5.3 ベクトル場の線積分

空間内の領域 D において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

と D 内の無限小変移 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{e}_1 + dy\boldsymbol{e}_2 + dz\boldsymbol{e}_3$ との内積を, 経路 C に沿って積分したもの

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C a_1(x,y,z)\,dx + a_2(x,y,z)\,dy + a_3(x,y,z)\,dz \tag{5.2}$$

をベクトル $\boldsymbol{A}$ の C に沿う **線積分** と呼ぶ.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_C (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r} = \alpha\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \beta\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

(ii)

$$\int_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで経路 $-C$ は経路 C を逆向きにたどる経路である.

(2) スカラー場 φ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\varphi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

5.4 ベクトル場の面積分

空間内の領域 D 内の曲面 S を含む領域において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の **面積分** を以下のように定義する.

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_S a_1 n_1(x,y,z) + a_2 n_2(x,y,z) + a_3 n_3(x,y,z)\, dS. \quad (5.3)$$

ここで $d\boldsymbol{S}, dS$ はそれぞれ曲面 S 上の **ベクトル面積素** と**面積素**, $\boldsymbol{n}$ は面積素 dS の **法線ベクトル** で, n_i はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \alpha\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \beta\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

ここで $-S$ は S の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2) $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$$

を, S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(i) 単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

(ii) 平面 $x=\pm1, y=\pm1, z=\pm,1$ で囲まれる立方体の表面.