6.1 ガウスの定理

一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える. このとき,

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV \tag{6.1}$$

が成り立つ. これを **ガウスの定理** と呼ぶ.

(1) 領域 V として xyz 直線直交座標系における微小体積を考えることにより, (6.1) が成り立つことを示せ.

(2) 密度 $\rho(x,y,z,t)$ である流体が速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ で運動しているとする. 流体のわき出しも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{6.2}$$

(3) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱エネルギー (熱フラックス) $\boldsymbol{q}$ (J m^{-2} sec^{-1}) は

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{6.3}$$

と表される. ここで T は物体の温度, k は **熱伝導率** (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を**熱伝導** と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\nabla^2 T. \tag{6.4}$$

ここで κ は **熱拡散率** (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c を用いて $\kappa = k/\rho c$ と表される.

6.2 ガウスの積分

空間内に存在する閉曲面 S を考える. S 上の点 P の原点 O に対する位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 点 P における S の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする. このとき,

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\,dS \tag{6.5}$$

を「ガウスの積分」という.

(1) 原点 O が S の外側にあるとき,

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\,dS = 0$$

となることを示せ (ヒント: $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla\dfrac{1}{r}$ となることと, ガウスの発散定理を用いる).

原点 O が S の内側, および表面にある場合は別の方法を用いる. 原点 O を中心とし, 半径 ρ の球面を S' とする. 半径 ρ は小さく, O が S の内部にある場合には S' は S 内に完全に含まれるとする.

(2) 原点 O が S の内部にある場合, S と S' で囲まれた閉領域の表面に対する面積分を考えると, (1) の考察から

$$\oint_{S+S'} \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\,dS = 0$$

となる. これを利用して

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\,dS = 4\pi$$

となることを示せ

(3) 原点 O が S の表面にある場合は,

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\,dS = 2\pi$$

となることを示せ

6.3 ストークスの定理

一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. このとき,

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{6.6}$$

が成り立つ. これを **ストークスの定理** と呼ぶ. ただし法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

(1) 閉曲線 C に沿って発生する磁場を $\boldsymbol{H}$ とすると, アンペールの法則から

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = I$$

が成り立つ. ここで I は C によって囲まれた曲面 S を通過する全電流である. 電流密度ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とすると $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ と表されることを用いて, 微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{6.7}$$

を求めよ.

(2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を $\boldsymbol{E}$ とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成り立つ. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. 磁束密度を $\boldsymbol{B}$ とすると $\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ と表されることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{6.8}$$

を求めよ.