

9.1 複素関数の極限と連続性

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ を考える. z が D 内を移動してある点 z_0 に近付くとき, w が w 平面内の点 w_0 に近付く場合, $f(z)$ は $z = z_0$ で極限值 w_0 を持つという. 数式では

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (9.1)$$

と表す. このとき z_0 にどの方向から近付いても w は w_0 に近付く (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数 $w = f(z)$ が次の3つの条件 [1] $z = z_0$ で $f(z_0)$ が存在する, [2] $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ が存在する, [3] $w_0 = f(z_0)$ が成り立つ, を同時に満たすとき, $f(z)$ は $z = z_0$ で連続であるという

(1) 次の関数 $f(z)$ の極限值を求めよ. ただし α は定数とする.

(i) $f(z) = (z^3 - 3\alpha^3) + 3z - \alpha \quad (z \rightarrow \alpha)$

(ii) $f(z) = \frac{z^3 - i\alpha}{z + \alpha} \quad (z \rightarrow i)$

(iii) $f(z) = \bar{z} \quad (z \rightarrow 0)$

(iv) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} \quad (z \rightarrow 0)$

(2) 次の関数 $f(z)$ の $z = 0$ における連続性を調べよ.

(i) $f(x) = \begin{cases} (z + \bar{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} (z + \bar{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

9.2 複素関数の微分 (1)

h を偏角一定の複素数とする. このとき極限值

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (9.2)$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能と言う. その極限値を $f(z)$ の $z = z_0$ における微分係数と言ひ, $f'(z_0)$ や $\frac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で正則であるという.

- (1) $f(z) = z^2$ とする. $h = \Delta x$ として式 (9.2) の定義に従ひ $f'(z)$ を計算せよ.
- (2) $f(z) = z^2$ とする. $h = i\Delta y$ として式 (9.2) の定義に従ひ $f'(z)$ を計算せよ.
- (3) $f(z) = z^2$ とする. $h = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta y = k\Delta x$ として, 式 (9.2) の定義に従ひ $f'(z)$ を計算せよ.
- (4) $f(z) = z^n$ の場合, 式 (9.2) の極限は h の偏角の値によらず nz^{n-1} に収束することを示せ.

9.3 複素関数の微分 (2)

(1) 与えられた点 z_0 における次の関数の微分係数を計算せよ.

(i) $f(z) = z^2 - 2iz + 3$ ($z_0 = i$)

(ii) $f(z) = \frac{1}{z+1}$ ($z_0 = 1$)

(iii) $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ($z_0 = -i$)

(iv) $f(z) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ ($z_0 = -i$)

(2) $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ($z \neq -\delta/\gamma$) を z について微分することにより, w が定数となる (z に依らない) ための条件を求めよ.

(3) n を自然数とする. このとき

$$f(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

の $z = 1$ における微分可能性を調べよ. ただし $f(1) = n + 1$ とする.

9.4 等角写像

関数 $f(z) = z^2$ による写像 $w = f(z)$ の性質について考える.

(1) z 平面上の 2 つの直線

$$(a) z = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + i\frac{t}{2}$$

$$(b) z = 1 + \frac{t}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

(ただし t は実数) の交点 z_0 と z_0 における直線の交角 θ を求めよ.

(2) (1) で与えられた 2 つの直線の写像 $f(z)$ による w 平面上の像を求め, それを図示せよ.

(3) (2) で求めた w 平面上での像の交点と, 交点における像の接線のなす角 θ' を求めよ.

9.5 コーシー・リーマンの定理

- (1) 領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x, y), v(x, y)$ とする ($z = x + iy, z \in D$). u, v が連続で, かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9.3)$$

を満たすならば, 関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の必要条件の証明).

- (2) 実関数 $u(x, y), v(x, y)$ が式 (9.3) を満たすとき, 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) は正則であることを証明せよ (コーシー・リーマンの定理の十分条件の証明).

コーシー・リーマンの微分方程式 (9.3) を変形すると, $u(x, y), v(x, y)$ の満たす式として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が得られる. これらは 2 次元のラプラス方程式である. ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれる. コーシー・リーマンの微分方程式 (9.3) の関係を満たすような調和関数の組を, 違いに共役な調和関数という.

- (3) $u(x, y) = e^x \sin y$ は調和関数であることを確かめよ.
 (4) 上記の u に共役な調和関数 $v(x, y)$ を求めよ.

9.6 複素関数の正則性

以下の複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) の関数 $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

- (1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$
 (2) $f(z) = e^{-y} (\cos x + i \sin x)$
 (3) $f(z) = z - \bar{z}$
 (4) $f(z) = z + 1/z$