12.1 コーシーの積分公式 (1)

(1) 次の積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とし内部に $z = \pi/2$ を含む円を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $\displaystyle \oint_C \frac{\sin z}{z}\, dz$

ii) $\displaystyle \oint_C \frac{1-\cos z}{z}\, dz$

iii) $\displaystyle \oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)/2}\, dz$

iv) $\displaystyle \oint_C \frac{1-\cos z}{z(z-\pi/2)}\, dz$

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ に対し積分 $\displaystyle \oint_C \frac{f(z)}{z}\, dz$ を求めよ. ただし積分路 C は原点と $f(z)$ の全ての特異点を含む閉曲線を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $\displaystyle f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2-1}$

ii) $\displaystyle f(z) = \frac{1}{z^3+1}$

iii) $\displaystyle f(z) = \frac{1+\cos z}{z-\pi}$

iv) $\displaystyle f(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z}+1} \quad (|z| < 1/2)$

12.2 コーシーの積分公式 (2)

複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$$

を考える. ここで a, b は実定数で $a > 0, b > 0$ とする.

(1) 図 12.1 の積分路 C, C_+ について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} f(z)\,dz = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

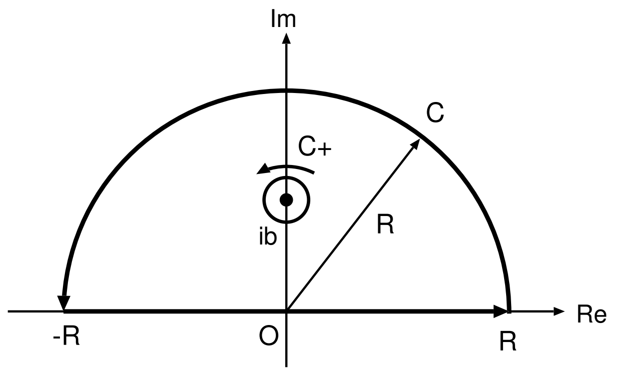

図 12.1: 積分路 C と C_+

(2) 図 12.1 の積分路を実軸について対称の位置に変換して得られる積分路 C', C_- (図 12.2) について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,dz = \frac{e^{ab}}{2ib}$$

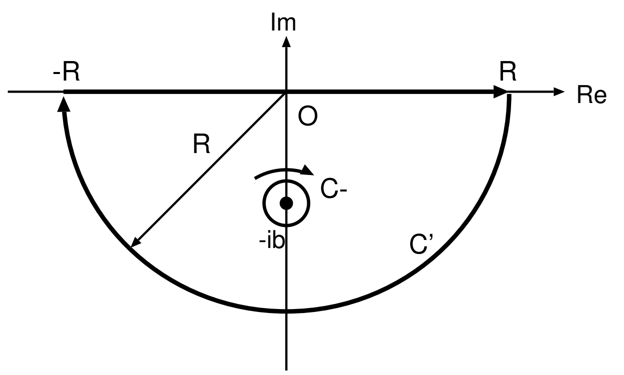

図 12.2: 積分路 C' と C_-

12.3 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, $f(z)$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \tag{12.1}$$

と表される.

(1) $f(z) = z^2$ とする. 以下の周回積分

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

を求め, それぞれが $f(z), f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z)$ に等しいことを示せ. ここで積分路 C は点 z を正の向きに一周する閉曲線とする.

(2) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz = \cos t$