## 13.1 留数定理 (1)

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 $C$ 上で連続, $C$ で囲まれた領域 $D$ 上で $n$ 個の特異点 $z_k$ ($k=1,2,\cdots n$) を持ち, それらの点以外では正則であるとき,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(z_k) \tag{13.1}$$

が成り立つ. ここで $\mathrm{Res} f(z_k)$ は $f(z)$ の $z=z_k$ における留数である. これを留数定理という.

以下では $f(z)$ として以下のような負の巾を持つ多項式

$$f(z) = g(z) + h(z), \tag{13.2}$$

$$g(z) = \frac{\alpha_{-m}}{(z-z_0)^m}\frac{\alpha_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} \tag{13.3}$$

を $z=z_0$ を囲む閉曲線 $C$ に沿って積分することを考え, 留数定理が成り立つことを証明する. ただし $\alpha_{-k}$ ($k=1,2,\cdots m$) は複素定数, $m$ は整数で $m \geq 1$, $\alpha_{-m} \neq 0$ で, $h(z)$ は $C$ 上で連続, $C$ 内部で正則な関数とする.

(1)

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$$

となることを示せ.

(2) $m$ が $m \geq 2$ を満たす整数のとき,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^m}\,dz = 0$$

となることを示せ.

(3) $f(z)$ の $C$ に関する周回積分は,

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \oint_C \frac{\alpha_{-k}}{(z-z_0)^k}\,dz + \oint_C h(z)\,dz$$

と表される. (1), (2) の結果を用いてこの積分が

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \alpha_{-1}$$

となることを示せ.

$\alpha_{-1}$ は $f(z)$ の $z = z_0$ における**留数**といい,

$$\alpha_{-1} = \mathrm{Res} f(z_0)$$

と表す.

(4) 式 (13.2) の $g(z)$ が $C$ 内部に $n$ 個の特異点 $z_k$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ を持つ場合,

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(z_k)$$

となることを示せ.

## 13.2 留数定理 (2)

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 $C$ 上で連続, $C$ で囲まれた領域 $D$ の点 $z_0$ で $m$ 位の極を持つとする. このとき, $z_0$ の近傍で $f(z)$ は

$$f(z) = g(z) + h(z),$$

$$g(z) = \frac{\alpha_{-m}}{(z-z_0)^m} \frac{\alpha_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0}$$

と表すことができる. ただし $\alpha_{-k}$ $(k = 1, 2, \cdots m)$ は複素定数, $m \geq 1$, $\alpha_{-m} \neq 0$ で, $h(z)$ は $C$ 上で連続, 領域 $D$ で正則な関数とする.

(1) $m = 1$ のとき

$$\alpha_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

となることを示せ.

(2) $m = 2$ のとき

$$\alpha_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left\{ (z-z_0)^2 f(z) \right\}$$

となることを示せ.

(3) $m = k$ のとき

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-z_0)^k f(z) \right\} \tag{13.4}$$

となることを示せ.

## 13.3 留数の計算

次の関数 $f(z)$ の各特異点における留数を求めよ.

(1) $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+2z+2}$

(2) $f(z) = \dfrac{z-1}{z^3-1}$

(3) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$

(4) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{\sin z}$

(5) $f(z) = \dfrac{z}{\sinh z}$

## 13.4 留数定理を用いた複素積分

次の積分を留数定理を用いて計算せよ. ただし積分路はすべて正の向きにとるものとする.

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(3z-i)}$
(積分路は原点を中心とする半径 1 の円)

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(2z-1)(3z-2)}\,dz$
(積分路は原点を中心とする半径 1 の円)

(3) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^4-1}$
(積分路は $z=i$ を中心とする半径 1 の円)

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^5+32}$
(積分路は原点を中心とする半径 1 の円)

(5) $\displaystyle\oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^5+32}$
(積分路は $z=-2$ を中心とする半径 1 の円)