4.1 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. ただし $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\ \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3\end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.

4.2 ローレンツ力

電場 $\boldsymbol{E}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q を持つ荷電粒子は, 以下の式で与えられる力 $\boldsymbol{F}$ を受ける.

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

(1) $\boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{v} = (u, v, 0), \boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とする. このとき荷電粒子の運動方程式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ とする. 速度 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ で動く座標系から荷電粒子の運動を見た場合, $\boldsymbol{F}$ から電場が消えることを示せ.

(3) 上記 (2) の場合において $\boldsymbol{E} = (0, E, 0), \boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ のとき, 速度 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ の大きさと向きを示せ.

4.3 中心力場の運動

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて一般に

$$\boldsymbol{F} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は r のみによって決まる関数である.
このとき中心力の場の中で運動する物体について, 面積速度

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

は時間によらす一定であることを示せ.

4.4 スカラーの勾配

座標 x, y, z の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 (x, y, z) における f の**勾配** (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{4.1}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は i 方向の単位ベクトルである. grad はグラジュエント, もしくはグラッドと発音する. (4.1) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f$$

と表される.

(1) 固定点 P から一定の微小距離 dr だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 f の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における ∇f に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$ としてみよ).

(2) ∇f は $f =$ 一定 の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.

(3) g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

(i) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g$

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(iii) $\nabla\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2}$

(iv) $\nabla f(g) = \dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

(4) 原点 O に対する点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, $|\boldsymbol{r}| = r$ とする. このとき以下の式が成り立つことを示せ. ただし $\boldsymbol{e}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルとする.

(i) $\nabla r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r$

(ii) $\nabla\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

(iii) $\nabla r^m = mr^{m-2}\boldsymbol{r} = mr^{m-1}\boldsymbol{e}_r$