9.1 複素関数の極限と連続性

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ を考える. z が D 内を移動してある点 z_0 に近付くとき, w が w 平面内の点 w_0 に近付く場合, $f(z)$ は $z = z_0$ で**極限値 w_0 を持つ**という. 数式では

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{9.1}$$

と表す. このとき z_0 **にどの方向から近付いても w は w_0 に近付く** (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数 $w = f(z)$ が次の 3 つの条件 [1] $z = z_0$ で $f(z_0)$ が存在する, [2] $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ が存在する, [3] $w_0 = f(z_0)$ が成り立つ, を同時に満たすとき, $f(z)$ は $z = z_0$ で**連続**であるという

(1) 次の関数 $f(z)$ の極限値を求めよ. ただし α は定数とする.

(i) $f(z) = (z^3 - 3\alpha^3) + 3z - \alpha \quad (z \to \alpha)$

(ii) $f(z) = \dfrac{z^3 - i\alpha}{z + \alpha} \quad (z \to i)$

(iii) $f(z) = \overline{z} \quad (z \to 0)$

(iv) $f(z) = \dfrac{z^2}{\overline{z}} \quad (z \to 0)$

(2) 次の関数 $f(z)$ の $z = 0$ における連続性を調べよ.

(i) $f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} (z + \overline{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

9.2 複素関数の微分

(1) 与えられた点 z_0 における次の関数の微分係数を計算せよ.

(i) $f(z) = z^2 - 2iz + 3 \quad (z_0 = i)$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{z+1} \quad (z_0 = 1)$

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \quad (z_0 = -i)$

(iv) $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) \quad (z_0 = -i)$

(2) $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (z \neq -\delta/\gamma)$ を z について微分することにより, w が定数となる (z に依らない) ための条件を求めよ.

(3) n を自然数とする. このとき

$$f(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

の $z = 1$ における微分可能性を調べよ. ただし $f(1) = n + 1$ とする.

9.3 等角写像

関数 $f(z) = z^2$ による写像 $w = f(z)$ の性質について考える.

(1) z 平面上の 2 つの直線

(a) $z = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t + i\dfrac{t}{2}$

(b) $z = 1 + \dfrac{t}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

(ただし t は実数) の交点 z_0 と z_0 における直線の交角 θ を求めよ.

(2) (1) で与えられた 2 つの直線の写像 $f(z)$ による w 平面上の像を求め, w 平面上での像の交点と, 交点における像の接線のなす角 θ' を求めよ.

9.4 複素関数の正則性

以下の複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) の関数 $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$