11.1 複素積分

(1) 3 点 $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ を頂点とする三角形を正の向きに一周する閉曲線を C とする. 次の周回積分を求めよ.

i) $\displaystyle\oint_C z\,dz$

ii) $\displaystyle\oint_C \overline{z}\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C e^{iz}\,dz$

(2) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は点 $z = \alpha$ を中心とする半径 a の円周を正の向きに 1 周するものとるする.

i) $\displaystyle\oint_C \,dz$

ii) $\displaystyle\oint_C (z-\alpha)\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-\alpha}$

iv) $\displaystyle\oint_C (z-\alpha)^n\,dz$ (n は整数)

(3) 積分

$$\int_C z\,dz \quad (C : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < \pi/2)$$

について不等式

$$\left|\int_C z\,dz\right| < \int_C |z|\,|dz|$$

が成り立つことを示せ.

11.2 コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が領域 D 上で正則で，単純閉曲線 C がその内部も含めてすべて D に 属するものとする．このとき

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{11.1}$$

である．

(1) 複素数 z の関数 $\sin z$ は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$C_1:\ z = \pi t \quad (0 \le t \le 1)$

$C_2:\ z = \pi + i(t-1) \quad (1 \le t \le 2)$

$C_3:\ z = -\pi(t-3) + i \quad (2 \le t \le 3)$

$C_4:\ z = -i(t-4) \quad (3 \le t \le 4)$

に沿った $\sin z$ の周回積分は零となることを確かめよ.

(2) 複素数 z の関数 e^z は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$C_1:\ z = t \quad (0 \le t \le 1)$

$C_2:\ z = 1 + i\pi(t-1) \quad (1 \le t \le 2)$

$C_3:\ z = -(t-3) + i\pi \quad (2 \le t \le 3)$

$C_4:\ z = -i\pi(t-4) \quad (3 \le t \le 4)$

に沿った e^z の周回積分は零となることを確かめよ.

11.3 正則関数の積分 (1)

(1) $f(z)$ を領域 D において正則な関数 ($z \in \boldsymbol{C}$) とする. D 内の 2 点 P, Q を結び, かつ D 内に含まれる任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 に沿って点 P から Q まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つことを示せ.

(2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z \in \boldsymbol{C}$). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\oint_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つこと示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

(3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

これより任意の複素数 α, β に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz} g(z)\,dz$$

を証明せよ.

11.4 正則関数の積分 (2)

(1) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とする半径 2 の円を反時計周りに一周するものとする.

(i) $\displaystyle \oint_C \frac{dz}{z^2+1}$

(ii) $\displaystyle \oint \frac{z}{z^2+1}\,dz$

(2) 次の積分の値を求めよ.

(i) $\displaystyle \int_0^{1+i} z^2\,dz$

(ii) $\displaystyle \int_0^{(\pi/2)i} e^z\,dz$

(3) 原点を中心とする半径 r の円周を C とする. C を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz}\,dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i) $\displaystyle \int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\cos(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

(ii) $\displaystyle \int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\sin(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

11.5 正則関数の積分 (3)

複素平面上において次式で与えられる曲線 C_1, C_2, C_3 が与えられたとする. このとき以下の問いに答えよ.

$$\begin{aligned} C_1 &: \; z = \sqrt{3}e^{i\pi t} \quad (0 \le t \le 1) \\ C_2 &: \; z = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t \quad (0 \le t \le 1) \\ C_3 &: \; z = i + e^{i\pi t}/2 \quad (0 \le t \le 2) \end{aligned}$$

(1) 曲線 C_1, C_2, C_3 を複素平面上に図示せよ.

(2) 曲線 C_1, C_2, C_3 に囲まれた領域で関数 $f(z) = 1/(z-i)$ は正則である. このとき次式が成り立つことを示せ.

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-i} = -\int_{C_2} \frac{dz}{z-i} + \oint_{C_3} \frac{dz}{z-i}$$

(3) 次の積分を求めよ.

(i) $\displaystyle \int_{C_2} \frac{dz}{z-i}$

(ii) $\displaystyle \oint_{C_3} \frac{dz}{z-i}$

(4) (2), (3) の結果を用いて以下の積分を求めよ.

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-i}$$