12.1 正則関数の積分 (2)

(1) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とする半径 2 の円を反時計周りに一周するものとする.

(i) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$

(ii) $\displaystyle\oint \frac{z}{z^2+1}\,dz$

(2) 次の積分の値を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2\,dz$

(ii) $\displaystyle\int_0^{(\pi/2)i} e^z\,dz$

(3) 原点を中心とする半径 r の円周を C とする. C を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz}\,dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\cos(\theta+ar\cos\theta)\,d\theta=0$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\sin(\theta+ar\cos\theta)\,d\theta=0$

12.2 コーシーの積分公式 (1)

(1) 次の積分を求めよ. ただし積分路 C は原点を中心とし内部に $z=\pi/2$ を含む円を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z}\,dz$

ii) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z}\,dz$

iii) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z(z-\pi)/2}\,dz$

iv) $\displaystyle\oint_C \frac{1-\cos z}{z(z-\pi/2)}\,dz$

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ に対し積分 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz$ を求めよ. ただし積分路 C は原点と $f(z)$ の全ての特異点を含む閉曲線を反時計周りに 1 周するものとする.

i) $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{z^2-1}$

ii) $f(z)=\dfrac{1}{z^3+1}$

iii) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$

iv) $f(z)=\dfrac{1}{e^{2\pi i z}+1} \quad (|z|<1/2)$

12.3　コーシーの積分公式 (2)

複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$$

を考える. ここで a, b は実定数で $a > 0, b > 0$ とする.

(1) 図 12.1 の積分路 C, C_+ について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_+} f(z)\,dz = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

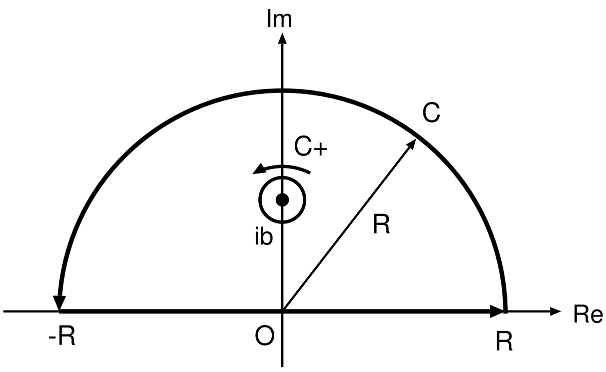

図 12.1: 積分路 C と C_+

(2) 図 12.1 の積分路を実軸について対称の位置に変換して得られる積分路 C', C_- (図 12.2) について, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,dz = \frac{e^{ab}}{2ib}$$

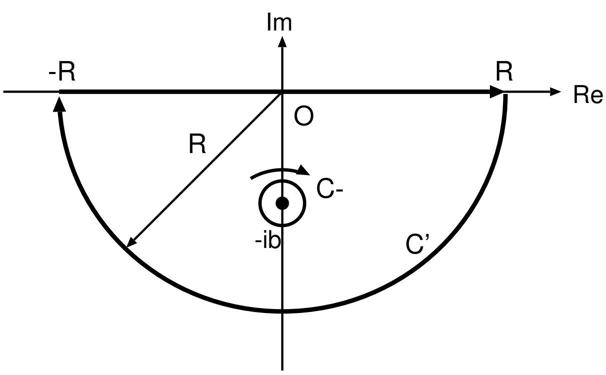

図 12.2: 積分路 C' と C_-