13.1 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, $f(z)$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \tag{13.1}$$

と表される.

(1) $f(z) = z^2$ とする. 以下の周回積分

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

を求め, それぞれが $f(z), f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z)$ に等しいことを示せ. ここで積分路 C は点 z を正の向きに一周する閉曲線とする.

(2) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz = \cos t$

13.2　留数の計算 (1)

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C 上で連続, C で囲まれた領域 D の点 z_0 で m 位の極を持つとする. このとき, z_0 の近傍で $f(z)$ は

$$f(z) = g(z) + h(z),$$

$$g(z) = \frac{\alpha_{-m}}{(z-z_0)^m}\frac{\alpha_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0}$$

と表すことができる. ただし α_{-k} $(k = 1, 2, \cdots m)$ は複素定数, $m \geq 1$, $\alpha_{-m} \neq 0$ で, $h(z)$ は C 上で連続, 領域 D で正則な関数とする.

(1) $m = 1$ のとき

$$\alpha_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

となることを示せ.

(2) $m = 2$ のとき

$$\alpha_{-1} = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left\{(z-z_0)^2 f(z)\right\}$$

となることを示せ.

(3) $m = k$ のとき

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-z_0)^k f(z)\right\} \tag{13.2}$$

となることを示せ.

13.3　留数の計算 (2)

次の関数 $f(z)$ の各特異点における留数を求めよ.

(1) $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+2z+2}$

(2) $f(z) = \dfrac{z-1}{z^3-1}$

(3) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$

(4) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{\sin z}$

(5) $f(z) = \dfrac{z}{\sinh z}$

13.4　留数定理を用いた複素積分

次の積分を留数定理を用いて計算せよ. ただし積分路はすべて正の向きにとるものとする.

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(3z-i)}$
(積分路は原点を中心とする半径 1 の円)

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(2z-1)(3z-2)}\, dz$
(積分路は原点を中心とする半径 1 の円)

(3) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^4-1}$
(積分路は $z=i$ を中心とする半径 1 の円)

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^5+32}$
(積分路は原点を中心とする半径 1 の円)

(5) $\displaystyle\oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^5+32}$ (積分路は $z=-2$ を中心とする半径 1 の円)