

1.1 スカラーとベクトル

大きさだけを持つ量をスカラー (scalar), 方向と大きさを持つ量をベクトル (vector) と呼ぶ. 以下ではスカラーを細文字のアルファベット A , ベクトルを太文字のアルファベット \mathbf{A} 等として表す. 空間 3 次元の直交直線座標系において, 各座標軸方向の基底ベクトルを i, j, k とすると, ベクトル \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

と表される. ここで A_x, A_y, A_z は \mathbf{A} の成分である.

- (1) ベクトル \mathbf{A} と x, y, z 軸とのなす角をそれぞれ α, β, γ とする. このとき

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

が成り立つことを示せ.

- (2) ベクトル \mathbf{B} の成分を \mathbf{A} と同様に B_x, B_y, B_z と表す. このとき以下のベクトルの成分を求めよ.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

- (3) ベクトルの加法に関する交換法則

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

および結合法則

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

が成り立つことを, 両辺のベクトルの成分を比較することで確かめよ.

1.2 ベクトルの成分

空間内に始点を O , 終点を P とするベクトル A と, 点 O を通る直線 s を考える. OP と s のなす角を θ とし, OP を s へ射影した長さを OP' とする. θ が鋭角か鈍角かによって OP' に符号をつけたものを A_s とすると,

$$A_s = A \cos \theta$$

となる. これを A の s 方向成分という.

- (1) ベクトル A の方向余弦を l, m, n , 直線 s の方向余弦を λ, μ, ν とする. このとき

$$\cos \theta = l\lambda + m\mu + n\nu$$

と表されることを示せ (ヒント: ベクトル (l, m, n) とベクトル (λ, μ, ν) の内積を考える).

- (2)

$$A_s = A_x\lambda + A_y\mu + A_z\nu$$

と表されることを示せ.

- (3) ベクトル A と B の和を C とする. このとき,

$$C_s = A_s + B_s$$

となることを示せ. ここで, A_s, B_s, C_s はそれぞれ A, B, C の s 方向成分である.

1.3 位置ベクトル

定点 O からある点 P に向かうベクトル OP を, 点 P の位置ベクトルという.

- (1) 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ a, b とする. このとき AB 間を $m : n$ に内分する点の位置ベクトル r を求めよ.
- (2) 点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ a, b, c とする. このとき三角形 ABC の重心 G の位置ベクトル g を求めよ.

1.4 直線と平面のベクトル方程式

点 A, B の位置ベクトルを a, b とする. A, B を通る直線上の位置ベクトル r は, パラメータ t を用いて

$$r = a + t(b - a)$$

すなわち

$$r = (1 - t)a + tb$$

と表される.

(1) 点 C の位置ベクトルを c とする. 点 A, B, C が一直線上にある場合,

$$la + mb + nc = 0, \quad l + m + n = 0$$

となるような同時にゼロとまらない実数 l, m, n が存在することであることを示せ.

(2) 角 AOB の二等分線上の位置ベクトル r は, パラメータ t を用いて

$$r = t \left(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} \right)$$

となることを示せ.

原点を通り, ベクトル p, q に平行な平面上の位置ベクトル r は, パラメータ s, t を用いて.

$$r = sp + tq$$

と表される.

(3) 点 A, B, C を通る平面上の位置ベクトルは,

$$r = (1 - s - t)a + sb + tc$$

と表されることを示せ.