

## 1.1 スカラーとベクトル

大きさだけを持つ量をスカラー (scalar), 方向と大きさを持つ量をベクトル (vector) と呼ぶ. 以下ではスカラーを細文字のアルファベット  $A$ , ベクトルを太文字のアルファベット  $\mathbf{A}$  等として表す. 空間 3 次元の直交直線座標系において, 各座標軸方向の基底ベクトルを  $i, j, k$  とすると, ベクトル  $\mathbf{A}$  は

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

と表される. ここで  $A_x, A_y, A_z$  は  $\mathbf{A}$  の成分である.

- (1) ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $x, y, z$  軸とのなす角をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とする. このとき

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

が成り立つことを示せ.

- (2) ベクトル  $\mathbf{B}$  の成分を  $\mathbf{A}$  と同様に  $B_x, B_y, B_z$  と表す. このとき以下のベクトルの成分を求めよ.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

- (3) ベクトルの加法に関する交換法則

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

および結合法則

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

が成り立つことを, 両辺のベクトルの成分を比較することで確かめよ.

## 1.2 ベクトルの成分

空間内に始点を  $O$ , 終点を  $P$  とするベクトル  $A$  と, 点  $O$  を通る直線  $s$  を考える.  $OP$  と  $s$  のなす角を  $\theta$  とし,  $OP$  を  $s$  へ射影した長さを  $OP'$  とする.  $\theta$  が鋭角か鈍角かによって  $OP'$  に符号をつけたものを  $A_s$  とすると,

$$A_s = A \cos \theta$$

となる. これを  $A$  の  $s$  方向成分という.

- (1) ベクトル  $A$  の方向余弦を  $l, m, n$ , 直線  $s$  の方向余弦を  $\lambda, \mu, \nu$  とする. このとき

$$\cos \theta = l\lambda + m\mu + n\nu$$

と表されることを示せ (ヒント: ベクトル  $(l, m, n)$  とベクトル  $(\lambda, \mu, \nu)$  の内積を考える).

- (2)

$$A_s = A_x\lambda + A_y\mu + A_z\nu$$

と表されることを示せ.

- (3) ベクトル  $A$  と  $B$  の和を  $C$  とする. このとき,

$$C_s = A_s + B_s$$

となることを示せ. ここで,  $A_s, B_s, C_s$  はそれぞれ  $A, B, C$  の  $s$  方向成分である.

## 1.3 位置ベクトル

定点  $O$  からある点  $P$  に向かうベクトル  $OP$  を, 点  $P$  の位置ベクトルという.

- (1) 点  $A, B$  の位置ベクトルをそれぞれ  $a, b$  とする. このとき  $AB$  間を  $m : n$  に内分する点の位置ベクトル  $r$  を求めよ.
- (2) 点  $A, B, C$  の位置ベクトルをそれぞれ  $a, b, c$  とする. このとき三角形  $ABC$  の重心  $G$  の位置ベクトル  $g$  を求めよ.

## 1.4 直線と平面のベクトル方程式

点 A, B の位置ベクトルを  $a, b$  とする. A, B を通る直線上の位置ベクトル  $r$  は, パラメータ  $t$  を用いて

$$r = a + t(b - a)$$

すなわち

$$r = (1 - t)a + tb$$

と表される.

(1) 点 C の位置ベクトルを  $c$  とする. 点 A, B, C が一直線上にある場合,

$$la + mb + nc = 0, \quad l + m + n = 0$$

となるような同時にゼロとならない実数  $l, m, n$  が存在することであることを示せ.

(2) 角 AOB の二等分線上の位置ベクトル  $r$  は, パラメータ  $t$  を用いて

$$r = t \left( \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} \right)$$

となることを示せ.

原点を通り, ベクトル  $p, q$  に平行な平面上の位置ベクトル  $r$  は, パラメータ  $s, t$  を用いて.

$$r = sp + tq$$

と表される.

(3) 点 A, B, C を通る平面上の位置ベクトルは,

$$r = (1 - s - t)a + sb + tc$$

と表されることを示せ.