3.1 ベクトルの微分

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とする．このときベクトル $\boldsymbol{a}$ の導関数は以下のように与えられる．

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+h)-\boldsymbol{a}(t)}{h} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}\right).$$

このとき以下が成り立つことを示せ．ここでベクトル $\boldsymbol{a}$ と同様に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ とする．

(1)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

3.2 ベクトルの積分

変数 t のベクトル関数があり, その微分が $\boldsymbol{a}(t)$ であるとき, もとのベクトル関数を $\boldsymbol{a}(t)$ の不定積分といい,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt$$

と表す.

$\dfrac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \boldsymbol{a}(t)$ ならば,

$$\int \boldsymbol{a}(t)\,dt = \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{c}$$

である. ここで $\boldsymbol{c}$ は t に依存しない任意のベクトル関数である.

(1) 次の不定積分を求めよ. ただし $|\boldsymbol{a}(t)| = a(t)$ とする

(i) $\displaystyle\int \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\,dt$

(ii) $\displaystyle\int \left(\boldsymbol{a}\times\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right)dt$

(ii) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{\boldsymbol{a}}{a^2}\right)dt$

ベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t)$ の定義域を $[t_0, T]$ とする. 区間 $[t_0, T]$ を N 個の小区間に分割し, 各区間の長さを Δt_i $(i = 1, 2, \cdots N)$, 各区間における任意の t の値に対する $\boldsymbol{a}(t)$ の値を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N$ とする. このとき

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

を $N \to \infty$ としたときの極限値が存在する場合, これを $t = t_0$ から T へ至る $\boldsymbol{a}(t)$ の定積分といい,

$$\int_{t_0}^{T} \boldsymbol{a}(t)\,dt \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \Delta t_i$$

と表す.

(2) 時間 t とともに位置と速度を変えながら運動する質点を考える. 質点の位置を $\boldsymbol{r}(t)$, 速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とするとき, 時刻 t_0 から t_1 に至るまでの質点の変移は

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0)$$

となることを示せ ($d\boldsymbol{r}(t)/dt = \boldsymbol{v}(t)$ であることに注意せよ).

3.3 エネルギーと仕事

質量 m の質点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 速度を $\boldsymbol{v}$ とする. $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ を時間 t のベクトル関数とし, 質点 P に働く外力を $\boldsymbol{F}$ とすると, ニュートンの運動の第二法則より,

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{3.1}$$

が成り立つ.

(1) 質点の運動エネルギーを $T(t) = \dfrac{1}{2}mv^2$ $(v = |\boldsymbol{v}|)$ と表すとき, 式 (3.1) から以下の関係が導かれることを示せ.

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,dt \tag{3.2}$$

式 (3.2) の右辺は時刻 t_0 から t_1 までの間に外力のなした仕事である. $\boldsymbol{v}dt$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の微小変位 $d\boldsymbol{r}$ であるから, 仕事は

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,dt = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}\cdot\,d\boldsymbol{r}$$

と表される. ここで $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1$ は時刻 t_0, t_1 における質点 P の位置ベクトルである. 仕事が経路によらず, 端点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1$ だけで定まる場合, $\boldsymbol{F}$ は保存力であるという. このときポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ を以下のように定義する.

$$U(\boldsymbol{r}_1) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}\cdot\,d\boldsymbol{r} + U(\boldsymbol{r}_0) \tag{3.3}$$

(2) 外力 $\boldsymbol{F}$ が万有引力場のように位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{r}/r^3)$ と表されるとき, ポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r}_1)$ は

$$U(\boldsymbol{r}_1) = -\frac{k}{r_1}$$

と表されることを示せ. ただし $\boldsymbol{r}_0$ は無限遠点とする.

(3) $\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{r}/r^3)$ と表されるとき, 角運動量 $\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ は時間によらないことを示せ.

式 (3.2), (3.3) より

$$T(t_1) + U(\boldsymbol{r}_1) = T(t_0) + U(\boldsymbol{r}_0)$$

が成り立つことがわかる. これを力学的エネルギー保存則という.

3.4 質点系の運動

n 個の質点からなる系を考え, 各質点の質量を $m_i(i = 1\cdots,n)$, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(i = 1\cdots,n)$, 速度を $\boldsymbol{v}_i(i = 1\cdots,n)$ とする.

(1) 質点系の運動量 $\boldsymbol{P}$ は各質点の運動量のベクトル和であるとすると,

$$\boldsymbol{P} = m\overline{\boldsymbol{v}}$$

と表されることを示せ. ここで m は質点系の質量の総和, $\overline{\boldsymbol{v}}$ は重心の速度ベクトルである.

(2) 各質点に作用する力を $\boldsymbol{F}_i(i = 1\cdots,n)$ とする. 重心の加速度を $\overline{\boldsymbol{a}}$ とすると,

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\overline{a}$$

となることを示せ.

なお, 質点の間に互いに作用する力は大きさが等しく反対方向であることから, $\sum_i \boldsymbol{F}_i$ を考える際には質点系に働く外力だけを考えればよいことになる.

(3) 質点系の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}m(\overline{\boldsymbol{v}})^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{v}'_i)^2$$

と表されることを示せ. ここで $\boldsymbol{v}'_i$ は重心を原点としたときの速度ベクトルで, $\boldsymbol{v}'_i \equiv \boldsymbol{v}_i - \overline{\boldsymbol{v}}$ と定義される.