5.1 ∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$

(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

(3) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

(4) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

(5) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

5.2 ベクトル場の線積分

空間内の領域 D において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

と D 内の無限小変移 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{e}_1 + dy\boldsymbol{e}_2 + dz\boldsymbol{e}_3$ との内積を, 経路 C に沿って積分したもの

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C a_1(x,y,z)\,dx + a_2(x,y,z)\,dy + a_3(x,y,z)\,dz \tag{5.1}$$

をベクトル $\boldsymbol{A}$ の C に沿う **線積分** と呼ぶ.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_C(\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r} = \alpha\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \beta\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

(ii)

$$\int_{-C}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで経路 $-C$ は経路 C を逆向きにたどる経路である.

(2) スカラー場 φ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\varphi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

5.3 ベクトル場の面積分

空間内の領域 D 内の曲面 S を含む領域において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の **面積分** を以下のように定義する.

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S a_1 n_1(x,y,z) + a_2 n_2(x,y,z) + a_3 n_3(x,y,z)\,dS. \quad (5.2)$$

ここで $d\boldsymbol{S}, dS$ はそれぞれ曲面 S 上の **ベクトル面積素** と**面積素**, $\boldsymbol{n}$ は面積素 dS の **法線ベクトル** で, n_i はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \alpha\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \beta\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

ここで $-S$ は S の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2) $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を, S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(i) 単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(ii) 平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm, 1$ で囲まれる立方体の表面.