

6.1 ガウスの定理

一階微分可能なベクトル場 \mathbf{A} と, \mathbf{A} が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える. このとき,

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (6.1)$$

が成り立つ. これを **ガウスの定理** と呼ぶ.

- (1) 密度 $\rho(x, y, z, t)$ である流体が速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ で運動しているとする. 流体のわき出しも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (6.2)$$

- (2) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱エネルギー (熱フラックス) \mathbf{q} ($\text{J m}^{-2} \text{sec}^{-1}$) は

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (6.3)$$

と表される. ここで T は物体の温度, k は熱伝導率 (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を熱伝導と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \quad (6.4)$$

ここで κ は熱拡散率 (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c を用いて $\kappa = k/\rho c$ と表される.

6.2 ガウスの積分

空間内に存在する閉曲面 S を考える. S 上の点 P の原点 O に対する位置ベクトルを \mathbf{r} , 点 P における S の法線ベクトルを \mathbf{n} とする. このとき,

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS \quad (6.5)$$

を「ガウスの積分」という.

(1) 原点 O が S の外側にあるとき,

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 0$$

となることを示せ (ヒント: $\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r}$ となることと, ガウスの発散定理を用いる).

原点 O が S の内側, および表面にある場合は別の方法を用いる. 原点 O を中心とし, 半径 ρ の球面を S' とする. 半径 ρ は小さく, O が S の内部にある場合には S' は S 内に完全に含まれるとする.

(2) 原点 O が S の内部にある場合, S と S' で囲まれた閉領域の表面に対する面積分を考えると, (1) の考察から

$$\oint_{S+S'} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 0$$

となる. これを利用して

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

となることを示せ

(3) 原点 O が S の表面にある場合は,

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 2\pi$$

となることを示せ

6.3 ストークスの定理

一階微分可能なベクトル場 A と, A が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. このとき,

$$\oint_C A \cdot dr = \int_S (\nabla \times A) \cdot n dS \quad (6.6)$$

が成り立つ. これを ストークスの定理 と呼ぶ. ただし法線ベクトル n の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

(1) 閉曲線 C に沿って発生する磁場を H とすると, アンペールの法則から

$$\oint_C H \cdot dr = I$$

が成り立つ. ここで I は C によって囲まれた曲面 S を通過する全電流である. 電流密度ベクトルを j とすると $I = \int_S j \cdot n dS$ と表されることを用いて, 微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times H = j \quad (6.7)$$

を求めよ.

(2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を E とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\oint_C E \cdot dr = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成り立つ. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. 磁束密度を B とすると $\Phi = \int_S B \cdot n dS$ と表されることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B \quad (6.8)$$

を求めよ.