7.1 一般化座標

座標 $\boldsymbol{r}$ を直交直線座標 (x, y, z) に代わる 3 つの変数 (u, v, w) で表す場合を考える. u, v, w はともに x, y, z の関数である. 例えば円筒座標では変数として (r, ϕ, z) を用い, それぞれ x, y, z と次の関係にある.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ z = z$$

球座標 (r, θ, ϕ) では

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

である.

(1) 直交直線座標と円筒座標の幾何学的関係を図示し, (x, y, z) を (r, ϕ, z) を用いて表せ.

(2) 直交直線座標と球座標の幾何学的関係を図示し, (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ.

u 曲線とは, v, w を固定して u を変化させた時に座標 $\boldsymbol{r}$ が描く軌跡のことを言う. その接ベクトル $\boldsymbol{r}_u$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{e}_z$$

v, w 曲線およびその接ベクトル $\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_w$ は同様に定義される. これら接ベクトルの方向をそれぞれ u, v, w 方向という.

(3) 円筒座標において $\boldsymbol{r}_r, \boldsymbol{r}_\phi, \boldsymbol{r}_z$ を $r, \phi, z, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ.

(4) 球座標において $\boldsymbol{r}_r, \boldsymbol{r}_\theta, \boldsymbol{r}_\phi$ を $r, \theta, \phi, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ.

u 曲線のスケール因子 h_u とは, u 方向接ベクトルの長さ $|\boldsymbol{r}_u|$ のことを言う. ここから u 方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_u$ が

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{\boldsymbol{r}_u}{h_u} \text{ または } \boldsymbol{r}_u = h_u \boldsymbol{e}_u$$

と定義される. v, w 曲線のスケール因子 h_v, h_u, v, w 方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w$ も同様に定義される. $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w$ は一般化座標系 (u, v, w) での基本単位ベクトルである.

(5) 円筒座標において h_r, h_ϕ, h_z を求めよ.

(6) 球座標において h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ.

7.2 面積素と体積素

一般化座標 (u_1, u_2, u_3) における面積素 $d\boldsymbol{S}_{ij}$ と体積素 dV はそれぞれ

$$d\boldsymbol{S}_{ij} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j \, du_i \, du_j$$

$$dV = |\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3)| \, du_1 \, du_2 \, du_3$$

であらわされる. ただしここでは和の規約は用いず式の簡略化のため $\boldsymbol{r}_{u_j} = \boldsymbol{r}_j, h_{u_j} = h_j$ と記す.

(1) 各点で接ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ (i=1,2,3) が互いに直交している座標系を直交曲線座標という. このとき

$$d\boldsymbol{S}_{ij} = h_i h_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j du_i du_j = \varepsilon_{ijk} h_i h_j \boldsymbol{e}_k du_i du_j$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3$$

を示せ. ここで $\boldsymbol{e}_j$ は u_j 方向基本単位ベクトルをあらわす. 和の規約は用いない.

(2) 円筒座標と球座標は直交曲線座標であることを示せ

(3) 円筒座標と球座標における体積素の表式をそれぞれ求めよ.

7.3 直交曲線座標における勾配

スカラー場 φ の勾配 grad φ はベクトルであり，直交直線座標系の基本単位ベクトルを用いて

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$$

と表される．これを直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表すには，この直交曲線座標の基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{u_j}$ を用いる．各成分 $(\mathrm{grad}\,\varphi)_{u_j}$ は grad φ を各基本単位ベクトルの方向に射影したものなので

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)_{u_j} = \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \boldsymbol{e}_{u_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_{u_j}$$

となる．

(1) $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_{u_j} = \dfrac{1}{h_j}\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ を示せ．この表式では和の規約は用いず，スケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記すものとする [ヒント：問題 6.1 の $\boldsymbol{e}_{u_j}$ の定義を思い出す].

(2) 恒等式 $\dfrac{df(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi))}{d\xi} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{d\xi}$ を利用し，

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

を示せ．この表式も和の規約は用いない．

(3) 円筒座標における勾配は

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

と表されることを示せ.

(4) 上と同様に球座標における grad φ の表式を書き下せ.

7.4 直交曲線座標における発散

直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表されるベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_{u_i}$ の発散の表式について考える. これは発散の定義から丹念に計算しても導けるが, ガウスの定理 $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dV = \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ を用いて導く方が簡単である. これを念頭に以下の問いに答えよ.

(1) 体積 V として, $u_i, u_i + \Delta u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 一定の面で囲まれた微小 6 面体を考える. このとき

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A} dV \approx \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

を示せ. ただしスケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記す.

(2)

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\;& \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2}\int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} [A_1 h_2 h_3 du_2 du_3]_{u_1=u_1}^{u_1=u_1+\Delta u_1} \\ &+ \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3}\int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} [A_2 h_3 h_1 du_3 du_1]_{u_2=u_2}^{u_2=u_2+\Delta u_2} \\ &+ \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1}\int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} [A_3 h_1 h_2 du_1 du_2]_{u_3=u_3}^{u_3=u_3+\Delta u_3}\end{aligned}$$

を示せ. 右辺はさらに

$$\approx \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3}\right)\Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

と近似できることを示せ.

(1) と (2) の結果を比較すると $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3}\right)$$

と書けることが分かる. これが曲線直交座標系での発散の一般形である.

(3) 円筒座標における $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の表式を求めよ.

(4) 球座標における $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の表式を求めよ.