

11.1 ド・ロピタルの公式

z を複素数とする. このとき以下の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 1}$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$$

$$(4) \lim_{z \rightarrow \pi/2} \frac{\cos z}{z - \pi/2}$$

$$(5) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

$$(6) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z^3}$$

$$(7) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^z}{z}$$

$$(8) \lim_{z \rightarrow 3\pi i} \frac{z - 3\pi i}{\sinh z}$$

11.2 複素積分

- (1) 3点 $z = 0, z = 1, z = 1 + i$ を頂点とする三角形を正の向きに一周する閉曲線を C とする. 次の周回積分を求めよ.

i) $\oint_C z dz$

ii) $\oint_C \bar{z} dz$

iii) $\oint_C e^{iz} dz$

- (2) 次の周回積分を求めよ. ただし積分路 C は点 $z = \alpha$ を中心とする半径 a の円周を正の向きに 1 周するものとする.

i) $\oint_C dz$

ii) $\oint_C (z - \alpha) dz$

iii) $\oint_C \frac{dz}{z - \alpha}$

iv) $\oint_C (z - \alpha)^n dz$ (n は整数)

- (3) 積分

$$\int_C z dz \quad (C : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < \pi/2)$$

について不等式

$$\left| \int_C z dz \right| < \int_C |z| |dz|$$

が成り立つことを示せ.

11.3 コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が領域 D 上で正則で, 単純閉曲線 C がその内部も含めてすべて D に属するものとする. このとき

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (11.1)$$

である.

- (1) 複素数 z の関数 $\sin z$ は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$$C_1: z = \pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$C_2: z = \pi + i(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

$$C_3: z = -\pi(t-3) + i \quad (2 \leq t \leq 3)$$

$$C_4: z = -i(t-4) \quad (3 \leq t \leq 4)$$

に沿った $\sin z$ の周回積分は零となることを確かめよ.

- (2) 複素数 z の関数 e^z は, 複素平面上いたるところで正則である. 次の式で与えられる閉曲線

$$C_1: z = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$C_2: z = 1 + i\pi(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

$$C_3: z = -(t-3) + i\pi \quad (2 \leq t \leq 3)$$

$$C_4: z = -i\pi(t-4) \quad (3 \leq t \leq 4)$$

に沿った e^z の周回積分は零となることを確かめよ.

11.4 正則関数の積分 (1)

- (1) $f(z)$ を領域 D において正則な関数 ($z \in C$) とする. D 内の 2 点 P, Q を結び, かつ D 内に含まれる任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 に沿って点 P から Q まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z \in C$). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z) dz = - \oint_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つことを示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

- (3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

これより任意の複素数 α, β に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta) d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) \frac{dg(z)}{dz} dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz} g(z) dz$$

を証明せよ.