

海洋の存在条件

- 一次元放射対流平衡モデルを用いた考察 -

Condition for the existence of ocean

-Study with a One-Dimensional Radiative-Convective Equilibrium Model-

齊藤 大晶

SAITO Hiroaki

北海道大学理学部地球科学科地球物理学科目
惑星物理学研究室

Planetary Physics Laboratory,

Department of Earth Sciences, Faculty of Science,

Hokkaido University

平成 21 年 6 月 22 日

目次

1	はじめに	1
2	放射平衡大気の射出限界	3
2.1	大気構造モデル	3
2.2	温度構造	4
2.3	数値計算結果	5
3	放射対流平衡大気の射出限界	8
3.1	大気構造モデル	8
3.2	対流圏構造	8
3.3	放射伝達	8
3.4	計算手法	8
3.5	対流圏を含めた大気構造	10
3.6	F_{IRtop}^\uparrow と T_s との関係	10
3.7	海洋の存在条件	11
4	まとめ	12
5	謝辞	15
A	Nakajima et al. 1992 全訳	16
A.1	要旨	16
A.2	イントロダクション	16
A.3	モデル	18
A.3.1	放射輸送	19
A.3.2	対流圏の構造	19
A.3.3	成層圏の構造	20
A.4	結果と議論	20
A.4.1	Komabayashi-Ingersoll 限界	20
A.4.2	P_{n0} が変化するときの F_{IRtop}^\uparrow と T_s の関係 ; 対流圏を持つ場合の Komabayashi-Ingersoll 限界	24
A.4.3	非凝結性成分が赤外放射を吸収するときの F_{IRtop}^\uparrow と T_s の関係性	25
A.5	結論	26
B	数式の導出	29
B.1	飽和蒸気圧の関係式	29
B.2	光学的深さの導出 (凝結性成分と非凝結性成分)	29
B.3	$F_{IR}^\uparrow, F_{IR}^\downarrow$ の導出	30

B.3.1 F_{IR}^{\uparrow} の導出過程	30
B.4 湿潤偽断熱減率の導出	31

要旨

本論文は惑星に海洋の存在できる条件について、対流圏が水蒸気に飽和した大気からの射出限界を考察することによって理解することを目的とする。

そのために、射出限界を灰色放射対流平衡大気モデルを使って調べた Nakajima et al.(1992) の内容についてレビューと再現数値計算を行った。

大気は非凝結性成分と凝結性成分の 2 成分で構成されており、ともに理想気体とする。凝結性成分の飽和蒸気圧は実際の水のそれを近似する関数で与える。非凝結性気体はあらゆる波長の放射に対して透明とし、凝結性気体は太陽放射を透過し、赤外吸収係数は一定、すなわち灰色大気とする。成層圏では放射平衡が成り立っており、そこでは凝結性成分のモル分率を一定とする。

放射対流平衡の解析の準備として、成層圏のみで構成されているとした大気の射出限界についてまず考察することにする。正味上向き赤外放射束の関数として、放射平衡の成立している大気の光学的深さに対する気温分布を得ることができる。これと飽和蒸気圧および静水圧平衡から決まる光学的深さと気温の関係を比較すると、正味の上向き放射束がある限界値を超えると両者を同時に満たすことができなくなるといことがわかる。

このことは対流圏界面が凝結性成分で飽和している大気には正味上向き赤外放射の限界、つまり射出限界が存在するというを意味する。このモデルから得られる射出限界を Komabayashi-Ingersoll 限界と呼ぶ。

次に対流圏を考慮に入れた放射対流平衡モデルを考える。対流圏における温度構造は擬湿潤断熱減率に従うものと仮定する。地表面温度をパラメータとして与え、はじめ全層が対流平衡にあるとする。その場合、正味上向き放射束はある高度で極大に達する。その高度より上空は正味の加熱を受けることになる。ここでこのような層は気温分布が放射平衡に従う成層圏になるものとして放射対流平衡構造が求まる。地表面温度を振って宇宙空間への赤外射出量の計算を行う事によって射出限界を求めた。

対流圏を含めた構造での射出限界の値は Komabayashi-Ingersoll 限界のそれよりもかなり小さくなる。

太陽放射量がこの射出限界を超えると、対流圏全体が凝結性成分で飽和した大気は平衡状態を保てなくなる。その場合、地表面に凝結性成分の貯蔵庫、つまり海洋は安定には存在できず、やがてはすべて蒸発しきってしまうと考えられる。つまり海洋が安定に存在するためには、太陽放射量がこの射出限界以下であることが必要条件となる。

1 はじめに

海は我々にとって馴染み深く、当たり前前の存在に思える。しかし実際には今のところわかっている範囲では、海 - 惑星の表層を覆う液体の水からなる物質圏 - は地球にしか確認されていない。金星は原始地球によく似た惑星であるといわれているが、その大気は水分に乏しく乾燥しており、もちろん地表には海は存在していない。仮に水を大量に投入したとして金星において持続的に海は存在できるだろうか。また地球や金星と中心星放射の強さなどの境界条件の異なる惑星ではどうだろうか。これらの疑問を解決するために、放射の熱収支の観点から海が存在条件を考察することにする。



図 1: 地球には豊かな水をたたえる海が存在する。海が持続的に存在する条件はなんなのか？

この論文は、これらの問いについて、海洋と蒸気圧平衡にある大気の熱収支の面から考察を行うことが目的である。そのために対流圏が水蒸気で飽和している放射対流平衡状態の大気からの射出限界について解析した Nakajima et al. (1992) をレビューし、その再現数値計算を行う。

Nakajima et al. (1992) を取り上げた理由は、かれらが現実の大気の振る舞いを損なうことなく、なるべく簡単化したモデルで海洋と平衡した大気の放射特性を解析しているからである。そのため、本質を理解するのに適しているだけでなく、さらに詳細でより現実的なモデルを構築する基礎となると考えた。

本論文は 6 つの章から構成される. 続く第 2 章で大気下端で蒸気圧平衡にある放射平衡大気からの射出限界について, 3 章では対流圏が蒸気圧平衡にある放射対流平衡大気からの射出限界について記し, 4 章でそれぞれをまとめた. また, Appendix に Nakajima et al., 1992 の全訳を掲載する. ここに出てくる一部の難解と思われる数式については, これらを理解するために必要な背景も含め Appendix で導出した.

2 放射平衡大気の射出限界

2.1 大気構造モデル

本章では、大気下端では赤外吸収能をもつ凝結性成分が飽和し、また全層で放射平衡が成り立っている灰色大気モデルを解析することにより、このような大気には射出限界があることを示す。射出限界とは、たとえどんなに大気下端の温度が上昇しようとも大気層から宇宙空間に射出される正味上向き赤外放射フラックスに上限値があること、あるいはその上限値自体のことをいう。

大気モデルには以下の仮定をおく。大気は非凝結性成分と凝結性成分で構成されており、かつ理想気体であるものとする。非凝結性成分は太陽放射と赤外放射の双方に対して透明とする。非凝結性成分は、太陽放射を透過するが赤外吸収能を持ち、その吸収係数は波長によらず一定、すなわち灰色大気を仮定する。これらの仮定は地球大気の性質を近似したものである。そして大気は放射平衡を満たし、大気下端において凝結性成分に飽和しているものとする。

凝結性成分の飽和蒸気圧曲線は実際の水のもので近似する。その分圧 p^* は次の式で表される。

$$p^*(T) = p_0^* \exp\left(-\frac{l}{RT}\right) \quad (1)$$

ここで $p_0^* = 1.4 \times 10^{11}$ Pa は定数、 $l = 43655$ J/mol は 1mol あたりの水の蒸発潜熱、 T は温度、 R は気体定数である。

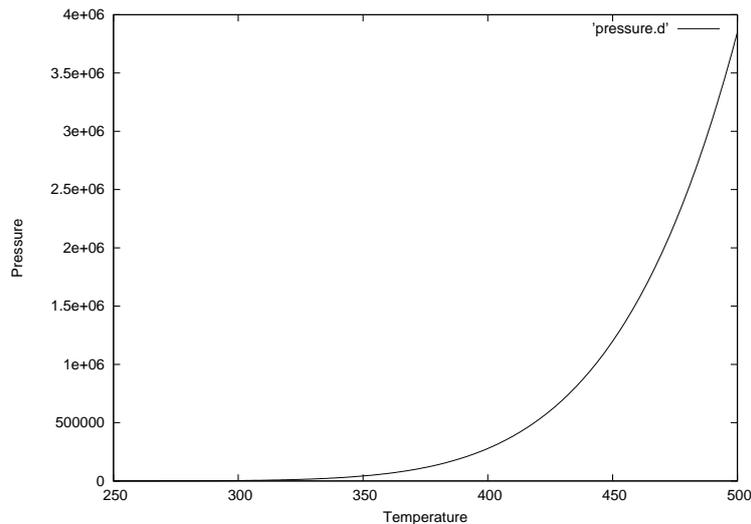


図 2: 飽和蒸気圧の温度依存性

図 2 からわかるように温度が上昇すればするほど飽和蒸気圧は劇的に上昇することに注目していただきたい。

2.2 温度構造

各高度の気温は正味外向き赤外放射フラックス F_{IRtop}^\uparrow をパラメーターとし、光学的厚さ τ の関数として求められる。ここで添え字 top は大気上端での値を意味するが、放射平衡にある場合にはあらゆる高度で正味上向き放射は一定であることに注意する。正味外向き赤外放射フラックス F_{IRtop}^\uparrow は、上向き赤外放射 F_{IR}^\uparrow と下向き赤外放射 F_{IR}^\downarrow と次の関係にある。

$$F_{IR}^\uparrow - F_{IR}^\downarrow = F_{IRtop}^\uparrow \quad (2)$$

Eddington 近似を仮定した放射伝達方程式は、次の 2 式で表される。

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{IR}^\uparrow}{d\tau} = F_{IR}^\uparrow - \pi B \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{IR}^\downarrow}{d\tau} = -F_{IR}^\downarrow + \pi B \quad (4)$$

ここで B は黒体放射強度、 τ は光学的深さを表す。(3) 式から (4) 式を引くと

$$\frac{2}{3} \frac{d(F_{IR}^\uparrow - F_{IR}^\downarrow)}{d\tau} = F_{IR}^\uparrow + F_{IR}^\downarrow - 2\pi B \quad (5)$$

放射平衡にある大気ではあらゆる高度で正味上向き赤外放射は一定であるので、5 式は次のように表せる。

$$F_{IR}^\uparrow + F_{IR}^\downarrow = 2\pi B \quad (6)$$

次に (3) 式 + (4) 式より

$$\frac{2}{3} \frac{d(F_{IR}^\uparrow + F_{IR}^\downarrow)}{d\tau} = F_{IR}^\uparrow - F_{IR}^\downarrow \quad (7)$$

(2) 式を考慮することにより、(7) 式はさらに簡単に表され、次のような関係式が得られる。

$$\frac{2}{3} \frac{d(F_{IR}^\uparrow + F_{IR}^\downarrow)}{d\tau} = F_{IRtop}^\uparrow \quad (8)$$

次に、 $\tau = 0$ において、 $F_{IR}^\uparrow = F_{IRtop}^\uparrow$ 、 $F_{IR}^\downarrow = 0$ の境界条件を用い、また (6) 式を考慮に入れ上式を積分をすると。

$$\pi B = \frac{1}{2} F_{IRtop}^\uparrow \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right)$$

が得られる. $\pi B = \sigma T^4$ (ここで σ はステファン・ボルツマン定数) であるので, 成層圏での温度構造は次式に従う.

$$\sigma T^4 = \frac{1}{2} F_{IRtop}^{\uparrow} \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (9)$$

凝結性成分の吸収のみの効果を考えたとき, 光学的深さ τ は次のような関係式で表される.

$$d\tau = \kappa_v x_v m_v \frac{dp}{\bar{m}g} \quad (10)$$

ただし \bar{m} は平均モル分子質量, g は重力加速度, κ_v, x_v, m_v , はそれぞれ凝結性成分の赤外吸収係数, モル分率, モル質量である. これを積分すると圧力 p の関数として光学的深さが表される.

$$\tau = \kappa_v x_v m_v \frac{p}{\bar{m}g}$$

さらに凝結性成分のモル分率が, 大気下端での値と等しいという条件を用いると上式は次のように変形される.

$$\tau = \kappa_v m_v p^*(T_{tp}) \frac{p}{p_{tp}} \frac{1}{\bar{m}g} \quad (11)$$

ここで大気下端を対流圏界面と見なし, 添字の "tp" は対流圏界面での値を表す. 放射平衡の状態にある大気は成層圏に対応するので, その下端は対流圏界面と見なすことができる.

2.3 数値計算結果

非凝結性成分の吸収係数 $\kappa_n = 0$ とし, 射出限界を示す. まず, (2) 式と大気下端 (対流圏界面) における光学的深さを与えると, 次の結果を得る.

$$\tau_{tp} = \kappa_v p^*(T_{tp}) \frac{1}{g} \frac{m_v}{\bar{m}} \quad (12)$$

ここで, 凝結性成分と非凝結性成分のモル分子質量 m_v, m_n の値は等しいと仮定しているので 2 成分の平均モル分子質量 \bar{m} は $\bar{m} = m_v = m_n$ となり, 上式はさらに簡単に表せて, 次のようになる.

表 1: 計算に用いる数値

物理定数	
気体定数	$R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
重力加速度	$g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$
ステファン・ボルツマン定数	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
パラメータ	
非凝結性成分の分子質量	$m_n = 18 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$
凝結性成分の分子質量	$m_v = 18 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$
凝結性成分の定圧モル比熱	$c_{pv} = 4R$
凝結性成分の潜熱	$l = 43655 \text{ J mol}^{-1}$
飽和水蒸気圧曲線の定数	$p_0^* = 1.4 \times 10^{11} \text{ Pa}$
大気下端における非凝結性成分の分圧	$p_{n0} = 10^5 \text{ Pa}$

$$\tau_{tp} = \kappa_v p^*(T_{tp}) \frac{1}{g} \quad (13)$$

(9) 式は放射平衡から決まる大気の温度構造, (13) 式は飽和した対流圏界面の温度と光学的深さの関係を表したものである. これらをグラフに表したものが図 3 である.

図 3 からわかるように, 正味赤外放射フラックスの値が高ければ高いほど (9) 式のグラフは右へ移動し, (13) 式のグラフと交わらなくなる. すなわち, 正味赤外放射フラックスがある限界値を越えると, 大気が放射平衡にあることと飽和した対流圏界面が存在することの両条件を同時に満たすことができなくなる.

両条件を満たす大気構造を考察するために, 対流圏界面の温度の関数として正味上向き赤外放射を表す. (9) 式と (13) 式から

$$F_{IRtop}^\uparrow = 4\sigma T_{tp}^4 / (3\kappa_v p^*(T_{tp})/g + 2) \quad (14)$$

この関係式をプロットしたものが図 4 である. このグラフには極大点が存在する. 両条件を満たすためには正味赤外上向き放射が 385 Wm^2 以下でなければならない. すなわち射出限界があることがわかる. この射出限界を特に Komabayashi-Ingersoll 限界と呼ぶ.

正味赤外上向き放射フラックスの極大値が現れる理由は以下の通りである. 対流圏界面の温度が低い場合には, 飽和水蒸気圧が低いいため, 大気的全光学的深さが小さい, その場合には正味赤外上向き放射フラックスは対流圏界面の温度の 4 乗に比例する. 一方, 対流圏界面の温度が高い場合には, 飽和水蒸気圧が高いため, 大気的全光学的深さが大きい. そして対流圏界面温度が上昇すると大気的光学的深さが急増し, 正味赤外上向き放射フラックスは減少する.

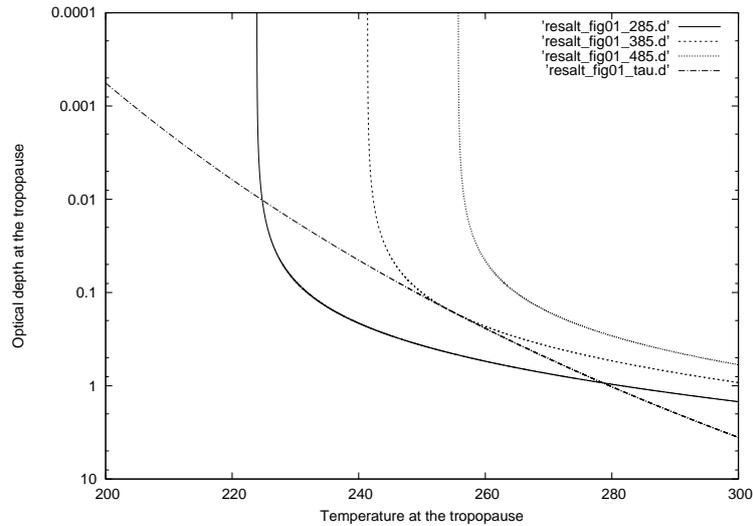


図 3: 一点鎖線は飽和した対流圏界面の温度と対流圏界面での光学的厚さとの関係。ただし、実線は正味上向き赤外放射フラックスが 285 W m^{-2} 時の放射平衡から決まる温度構造、破線は正味上向き赤外放射フラックスが 385 W m^{-2} 時の放射平衡から決まる温度構造、点線は正味上向き赤外放射フラックスが 485 W m^{-2} 時の放射平衡から決まる温度構造を表している。

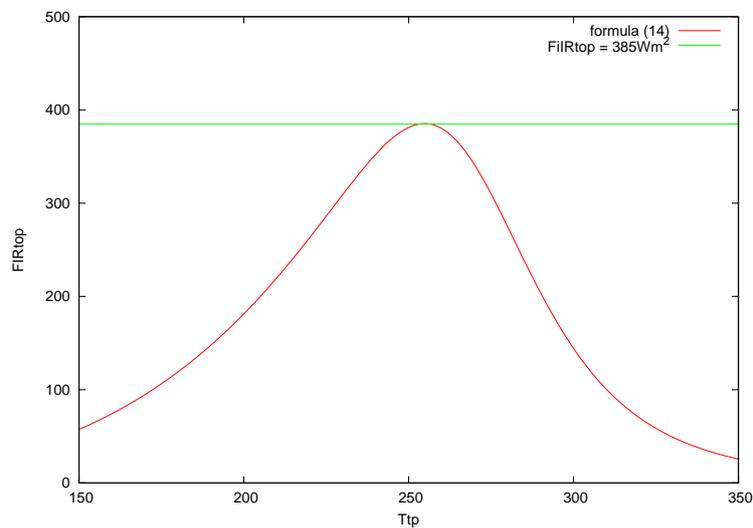


図 4: 対流圏界面における温度と正味上向き赤外放射フラックスの関係。

3 放射対流平衡大気の射出限界

3.1 大気構造モデル

2章では成層圈のみからなる大気モデルを考えたが、より現実的なモデルとして、本章では対流圏と成層圏の2層で構成されている大気モデルを考える。

このモデルでは対流による熱輸送を考慮し、対流圏の温度減率は擬湿潤断熱減率に従うものとする。また成層圏での凝結性成分のモル分率は一定とし、その値は対流圏界面での値に一致するものとする。

3.2 対流圏構造

対流圏での温度勾配は次のように与えられる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\text{moistpseudoadiabat}} = \frac{\frac{RT}{\rho c_{pn}} + \frac{x_v^* l}{x_n p c_{pn}}}{x_n + x_v^* \frac{c_{pv}}{c_{pn}} + \frac{x_v^* l^2}{x_n RT^2 c_{cn}}} \quad (15)$$

ここで c_{pv} , c_{pn} は凝結性, 非凝結性成分の定圧モル比熱, x_v , x_n は凝結性, 非凝結性成分のモル分率である。この(15)式の導出は Appendix B-4 に記述した。

3.3 放射伝達

放射伝達方程式(3), (4)を積分する事によって上向き赤外放射 $F_{IR}^\uparrow(\tau)$, 下向き赤外放射 $F_{IR}^\downarrow(\tau)$ は次のように表すことができる。

$$F_{IR}^\uparrow(\tau) = \pi B(\tau) - \int_{\tau_b}^{\tau} \frac{d}{d\tau} (\pi B(\hat{\tau})) \times \exp\left(-\frac{3}{2}(\hat{\tau} - \tau)\right), \quad (16)$$

$$F_{IR}^\downarrow(\tau) = \pi B(\tau) - \int_0^{\tau} \frac{d}{d\hat{\tau}} (\pi B(\hat{\tau})) \times \exp\left(-\frac{3}{2}(\tau - \hat{\tau})\right) - \pi B(0) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right). \quad (17)$$

ここで, τ_b は大気的全光学的深さである。また $F_{IRtop}^\uparrow \equiv F_{IR}^\uparrow(0)$ である。

3.4 計算手法

Runge-Kutta 法により対流圏の温度分布を計算する。まず大気下端における非凝結性成分の分圧 p_{n0} と温度 T_s の値を与える。これらを境界条件として、擬湿潤断熱減率(15)式を大気下端から積分し、大気温度構造を求める。大気上層での

圧力を logscale でほぼ等間隔に刻むように、刻み幅 h を $h = -\frac{\varepsilon \times p}{(1.0 + \varepsilon)}$ のように置く。ここでは ε の値を $\varepsilon = 0.1$ とした。得られた温度分布と凝結性成分が飽和しているという仮定から凝結性成分のモル分率分布 $x_v(p)$ を得る事ができる。また (10) を積分することによって圧力の関数として光学的深さ $\tau(p)$ を得る。

これらを用いて (3), (4) 式で表される上向き赤外放射フラックス, 下向き赤外放射フラックス $F_{IR}^\uparrow, F_{IR}^\downarrow$ を台形公式を利用し数値計算する。

対流圏界面は以下のように決める。まず正味上向き赤外放射フラックスの収束 $\text{div}F_{net} \equiv \frac{dF_{net}}{d\tau}$ は次のように表される。

$$\text{div}F_{net} = F_{IR}^\uparrow + F_{IR}^\downarrow - 2\sigma T^4 \quad (18)$$

大気の温度が十分に低い高度で正味上向き赤外放射フラックスの収束が正になる。そのような高度では放射加熱が起き、成層圏が形成される。

成層圏では放射平衡状態にあり正味上向き赤外放射フラックスの収束の値は 0 である。したがって対流圏上端と成層圏下端を結ぶ対流圏界面における正味上向き赤外放射フラックスの収束の値も 0 である必要がある。

$\text{div}F_{net}$ が 0 になる高度は外挿法により求める。具体的には、対流圏界面に一番近い対流圏の 2 格子点 ($\text{div}F_{net}$ が負から正になる直前の格子点) から外挿した。それより上空の温度構造は成層圏であるとみなせるので (9) 式に従う。

全層対流圏として計算を行っていたため、本来成層圏である領域での凝結性成分のモル分率は本来のそれよりも低い。すなわち全光学的深さが本来のものよりも低く見積られているので、不足している分を考慮して、大気構造を再計算する必要がある。具体的には、もう一度新しく求めた光学的深さを用いて $\text{div}F_{net}$ を逐次的に再計算することにより、対流圏界面を決定する。

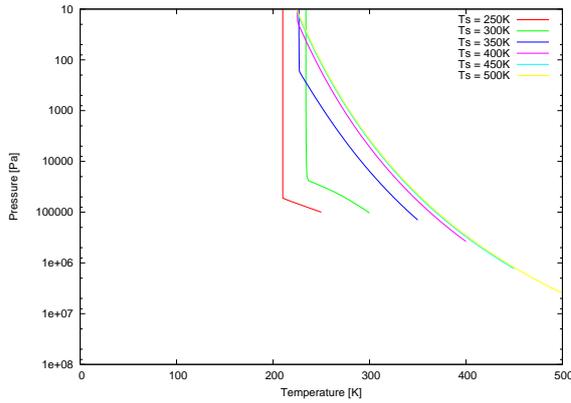


図 5: 大気温度と圧力の関係

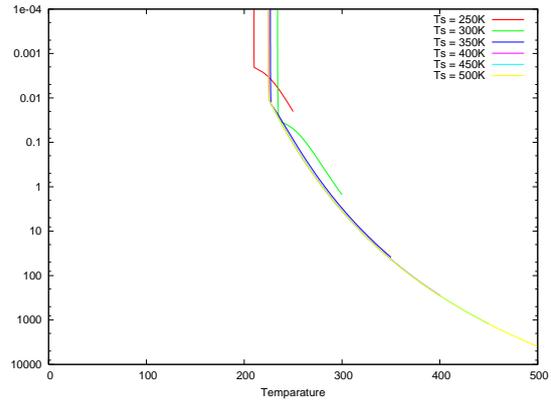


図 6: 光学的深さと大気温度の関係

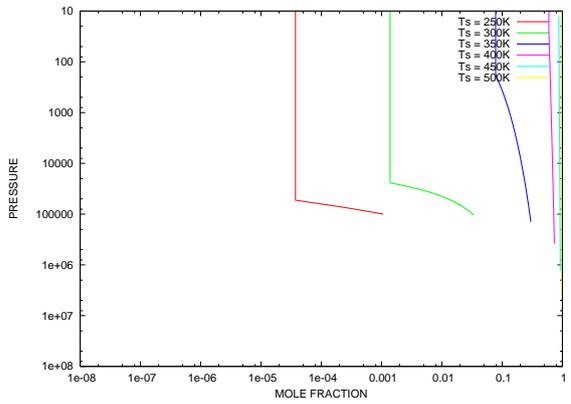


図 7: 光学的深さと凝結性成分のモル分率関係

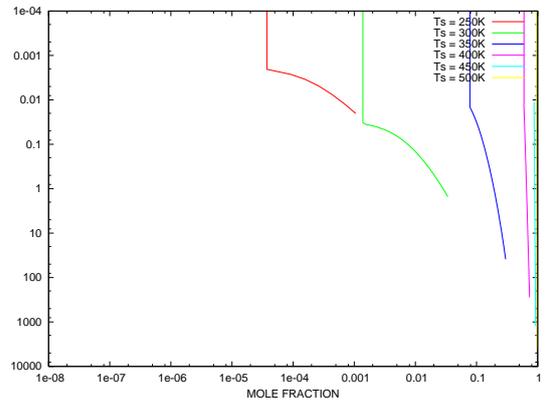


図 8: 光学的深さと凝結性成分のモル分率関係

3.5 対流圏を含めた大気構造

先で求めた対流圏を含む平衡構造の例を以下に示す。ここでは大気の下における非凝結性成分の分圧を p_{n0} を現在の地球の地表面圧力にほぼ等しい 10^5Pa に固定する。モル分率と温度の鉛直構造は図 3.4 から図 3.4 に示されている。図 3.4 と図 3.4 では鉛直座標は圧力 p で一方図 3.4 と図 3.4 では光学的深さ τ である。

3.6 F_{IRtop}^\uparrow と T_s との関係

前節と同じ条件下で計算された T_s と F_{IRtop}^\uparrow の関係を図 3.7 に示す。図 3.7 で重要なポイントは次の二つである。一つ目は正味上向き赤外放射 F_{IRtop}^\uparrow の極大値は Komabayashi-Ingersoll 限界を越えることがない点である。二つ目は、地表面温度

が 400K より高いとき F_{IRtop}^\uparrow の値は一定値 (約 293 Wm^{-2}) に漸近し, 地表面温度に直接的に依存していないことである.

このような特徴が表れる理由は次のとおりである. 図 3.4 と図 3.4 から地表面温度 T_s が 300K を超えたとき全光学的深さが 1 よりも高くなることがわかる. このような場合, 光学的深さがおよそ 1 である気層からの放射が F_{IRtop}^\uparrow に最も寄与する. 地表面温度が 400K 以上の場合, 水蒸気の実分率が 1 に近付くので, 大気の温度構造が飽和水蒸気圧曲線に近づく. そのため光学的深さがおよそ 1 である気層の温度がほぼ一定であるので F_{IRtop}^\uparrow の値もほぼ一定になる.

3.7 海洋の存在条件

海洋が存在するためには, 太陽放射の入射量が外向き赤外放射の射出限界よりも低い必要がある. 海洋と気液平衡の状態にありかつ, 放射対流平衡の状態にある大気構造における正味外向き赤外放射の最大値を射出限界と呼ぶ. 図 9 は $p_n = 10^5 \text{ Pa}$ の時の正味外向き赤外放射の地表面温度に対する依存性を表したものである. 図 9 に示した例では射出限界は 345 W m^{-2} である.

射出限界は非凝結性成分の地表面分圧 p_n に依存する. 図 10 は非凝結性成分の地表面分圧 $p_n = 0 \sim 10^7 \text{ Pa}$ の範囲で変化させた時の正味外向き赤外放射と地表面温度の関係である.

1. p_n の値が大きくなると, 射出限界は Komabayashi - Ingersoll 限界の値に漸近する. また Komabayashi - Ingersoll 限界を越えることはない.
2. p_n の値が小さくなると, 正味外向き赤外放射は極大値を持たなくなり, 温度の上昇とともに一定値に近づく. この一定値は凝結性成分のみで構成された大気モデルの射出限界に等しい.

ここで p_n が大きい場合に, 十分に地表面温度が高い時に得られる漸近値は凝結性成分のみで構成されている大気の射出限界 (以下では, この射出限界を純凝結性成分大気射出限界と呼ぶことにする) に相当する. また射出限界は純凝結性大気射出限界を下回ることはない.

p_n の値が大きい時の振舞いは, 非凝結性成分の実分率が上昇し, 相対的に凝結性成分の実分率が減少した結果おこる. 凝結性成分の実分率が減少すると対流圏の温度減率が乾燥断熱減率に近付き, 高度による温度の低下が大きい. そのため対流圏の上層では凝結性成分が少なくなり, 光学的深さが浅くなる. 従って光学的深さが 1 になる高度は地表面に近く, 温度が高くなり, 大気上端での外向き赤外放射が上昇する.

$P_{n0} = 10^5$ の場合について海洋の存在する条件を考察する.

- $F_0 \geq 345 \text{ Wm}^{-2}$ の時

- 平衡解を持たない. このような大気の状態を暴走温室状態という. この場合, 入射太陽フラックスが射出限界を上回り, 気温が上昇する. そして, 温室効果ガスである凝結性成分が海洋から蒸発し, さらに温度が上昇するフィードバック効果により最終的には海洋がすべて蒸発してしまうと考えられる.
- 純凝結性成分大気射出限界 $\leq F_0 \leq 345 \text{ Wm}^{-2}$ の時
 - 平衡解を 2 つ持つ. 2 つの平衡解のうち, 地表面温度が低い解は海洋が安定に存在でき, 地表面温度の高い解は海洋が安定に存在できないと考えられる. 地表面温度が低い解が安定である理由は地表面温度に正の摂動を与えた場合, 正味外向き赤外放射が入射太陽フラックスよりも大きくなるので, 大気はもとの状態にむかって冷却され, 逆に負の摂動を与えた場合には, 元の状態にむかって加熱されるからである. 地表面温度が高い解が不安定である理由は地表面温度に正の摂動を与えた場合, 大気はより加熱され, 負の摂動を与えた場合には大気はより冷却され, 元の状態に戻って来ないからである.
- $F_0 \leq$ 純凝結性成分大気射出限界の時
 - 平衡解を 1 つ持つ. この平衡解の場合海洋は安定して存在すると考えられる. この理由は前述の海洋が安定して存在できる場合と同じである. ただし海洋が凍結する可能性は無視した. このモデルでは液体の水が存在できる温度 273K の地表面温度を得るためには, 入射太陽フラックスは約 300 Wm^{-2} 以上である必要がある.

4 まとめ

海洋が存在している惑星では入射太陽フラックスの値によって暴走温室効果が生じる可能性がある. 惑星に入射する太陽放射が微量に増加した場合, 地表面温度が上昇するため海洋表面から温室効果ガスである水蒸気が大気中に供給される. 大気中の水蒸気量が増加すると温室効果によりさらに地表面温度が上昇する. このようなフィードバック効果により条件によっては地表面温度および大気中の水蒸気量は増加しつづける状態が発生する可能性がある.

暴走温室効果が発生するのは入射太陽フラックスが射出限界を超えた時である. 地表面温度が上昇した場合, 大気上端における正味上向き赤外放射フラックスは上昇するとは限らず上限値が存在する場合がある. この上限値のことを射出限界という.

射出限界にはいくつか種類がある. Komabayashi - Ingersoll 限界は大気下端 (対流圏界面) で赤外吸収能をもつ凝結性成分が飽和し, かつ全層 (成層圏) で放射平衡

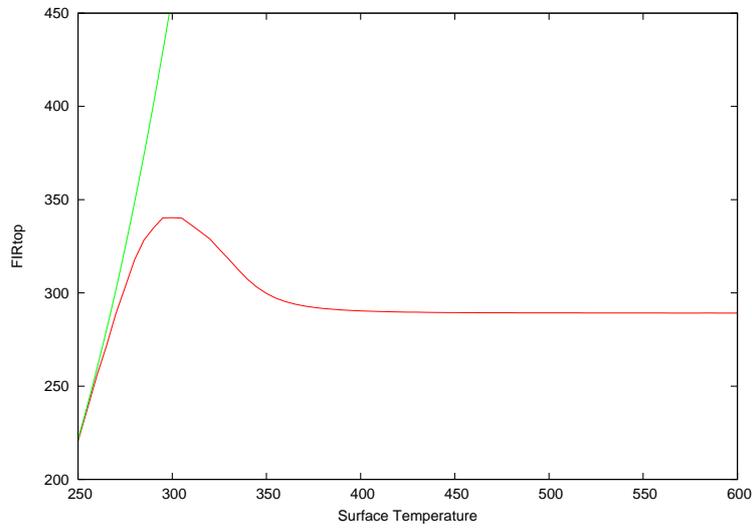


図 9: 正味外向き赤外放射フラックスと地表面温度との関係

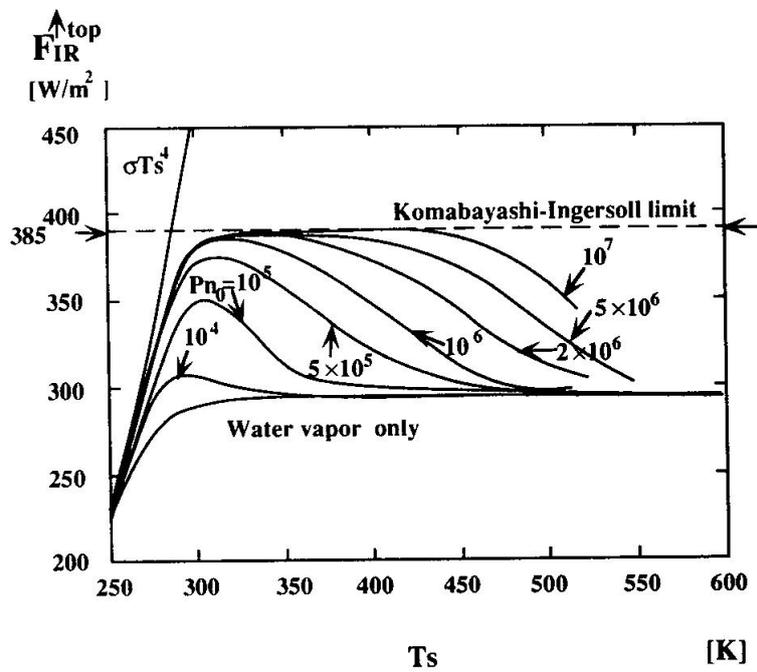


図 10: 非凝結性成分の地表面気圧を変化させた際の外向き赤外放射と温度の関係

が成り立っているような大気モデルで表れる射出限界である。対流圏界面の温度が低い場合には、飽和水蒸気圧が低いため大気的全光学的深さが小さい、その場合には正味上向き放射フラックスは対流圏界面の温度の 4 乗に比例する。一方対流圏界面の温度が高くなると、飽和水蒸気圧も高くなるため、大気的全光学的深さが大きくなる。結果として全光学的深さが著しく増加するため、正味上向き赤外放射が最大値に達した後、減少する。この最大値が Komabayashi - Ingersoll 限界である。

一方、純凝結性成分大気射出限界は対流圏と成層圏の 2 層から成り、かつ凝結性成分のみで構成される大気モデルで表れる射出限界である。地表面温度が上昇すると大気的全光学的深さが増加する。全光学的深さが十分大きい場合、光学的深さがおよそ 1 である気層からの放射が大気上端における正味上向き赤外放射フラックス F_{IRtop}^{\uparrow} に最も寄与する。このモデルでは対流圏における温度構造は飽和水蒸気圧曲線に従う。また成層圏の光学的深さは小さい。そのため地表面温度が十分高い場合には、光学的深さが 1 である気層の温度が一定なので F_{IRtop}^{\uparrow} の値も一定値をとる。この一定値が純凝結性成分射出限界である。

対流圏と成層圏の 2 層から成り、かつ凝結性成分と非凝結性成分で構成される大気モデルで表れる射出限界がある。この射出限界の特徴は、Komabayashi - Ingersoll 限界と純凝結性成分射出限界の間の値をとる。非凝結性成分の分圧を $p_{n0} = 0$ とした場合、この射出限界は前に述べた純凝結性成分大気射出限界に一致する。

$p_{n0} = 10^5$ の場合

ついて海洋の存在する条件を考察する。

- $F_0 \geq 345 \text{ Wm}^{-2}$ の時

- 平衡解を持たない。このような大気の状態を暴走温室状態という。この場合、入射太陽フラックスが射出限界を上回り、気温が上昇する。そして、温室効果ガスである凝結性成分が海洋から蒸発し、さらに温度が上昇するフィードバック効果により最終的には海洋がすべて蒸発してしまうと考えられる。

- 純凝結性成分大気射出限界 $\leq F_0 \leq 345 \text{ Wm}^{-2}$ の時

- 平衡解を 2 つ持つ。2 つの平衡解のうち、地表面温度が低い解は海洋が安定に存在でき、地表面温度の高い解は海洋が安定に存在できないと考えられる。地表面温度が低い解が安定である理由は地表面温度に正の摂動を与えた場合、正味外向き赤外放射が入射太陽フラックスよりも大きくなるので、大気はもとの状態にむかって冷却され、逆に負の摂動を与えた場合には、元の状態にむかって加熱されるからである。地表面温度が高い解が不安定である理由は地表面温度に正の摂動を与えた場合、大気はより加熱され、負の摂動を与えた場合には大気はより冷却され、元の状態に戻って来ないからである。

- $F_0 \leq$ 純凝結性成分大気射出限界の時
 - 平衡解を 1 つ持つ. この平衡解の場合海洋は安定して存在すると考えられる. この理由は前述の海洋が安定して存在できる場合と同じである. ただし海洋が凍結する可能性は無視した. このモデルでは液体の水が存在できる温度 273K の地表面温度を得るためには, 入射太陽フラックスは約 300 Wm^{-2} 以上である必要がある.

これら 3 つの条件のどれも現在の地球の外向き赤外放射の値 $F_{IRtop}^\uparrow = 239.75 \text{ Wm}^{-2}$ を越えることがない. すなわち現在の地球において, 現在の太陽との距離を保っている限りこのモデルでは海洋が消滅する危険はない. ちなみに Komabayashi-Ingersoll 限界や対流圏, 非凝結性成分の地表面気圧が 10^5 Pa 時の成層圏の二層を考慮に入れた大気構造の射出限界の最大値と等しい入射太陽フラックスを得る地球の位置 (現在の地球の位置を $R = 1.00$ とする) はそれぞれ $R = 0.62, 0.82$ であり, ちょうど金星 ($R = 0.72$) あたりの位置である. もしその位置に地球が移動するようなことがあれば海洋は全て蒸発し, 暴走温室状態で突入するであろう.

5 謝辞

本卒業論文を完成させるにあたり多くの先生方, 先輩方に御指導, 助言をいただきました. 特に倉本圭教授には夜遅くまで疑問を解決するまで粘り強く御指導いただきました. また, 普段からのゼミ, セミナーにおける議論を通して多くの知識や示唆を頂いた惑星物理学研究室のみなさまに感謝いたします. 本当にありがとうございました.

参考文献

- [1] Nakajima et al., 1992: A study on the runaway greenhouse effect with a one-dimensional radiative-convective equilibrium model. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2256-2266.
- [2] 石渡 正樹, 1996: 大気構造の太陽定数依存性: 暴走限界の決定と暴走温室状態の数値計算.
- [3] J. T. Houghton, 2002: THE PHYSICS OF ATMOSPHERES THIRD EDITION, Cambridge University press.

A Nakajima et al. 1992 全訳

A.1 要旨

単純な一次元放射対流平衡モデルを用いて、表面温度と大気の上層部における上向き赤外放射との関係性について調べた。モデル大気は灰色赤外吸収係数を持ち、放射平衡が成り立っている成層圏と湿潤断熱の対流圏で構成されている。上向き赤外放射の上限値が存在することが認められた。上限値の存在は、大気全体の光学的深さが十分に深く、光学的深さがほぼ1の高度付近の温度構造がある固定されたプロファイルに接近する時に現れる射出限界によって特徴づけられる。この上限値の出現は、成層圏の放射均衡の拘束条件から得られる Komabayashi と Ingersoll が発見したそれとは異なる。これらの射出限界の一つでは、外向き赤外放射は表面温度が上昇するにつれて、漸近極限を持つ。これは対流圏の構造が水の飽和蒸気圧曲線に近づくことによって起こる。Abe と Matsui また Kasting によって利用されているより複雑な放射過程と熱力学過程を考慮したモデルで現れる漸近極限は、我々のモデルで示している漸近極限に対応していると考えられる。

A.2 イントロダクション

海が蒸発するのかもしれないのかという問題は地球型惑星における大気の進化を研究する際に重要な役割を果たす。水蒸気は非常に効率的な赤外吸収体であり、飽和蒸気圧は温度の急激な増加関数であるので、海はいわゆる暴走温室効果 (例えば Plass 1962; Gold 1964) によって比較的簡単に蒸発するだろうと考えられてきた。我々は以下のように不安定プロセスを想像することができる。大気への入射太陽フラックス F_0 がわずかに増加したという場面を仮定しよう。 F_0 が上昇するにつれて、表面温度 T_s も増加するであろう。 T_s がより高くなることで、水蒸気供給が急激に増加する。結果として、赤外吸収体の質量が非常に増し、 F_0 の増加とバランスすべき外向き赤外放射 F_{IRtop}^\uparrow の増加を得るには、 T_s は更に上昇しなければならない。 T_s の上昇によって、をさらに上昇させる更なる水蒸気の供給が起こることになる。このフィードバック過程は海洋が完全に蒸発してしまうまで続くものと予想される。しかしながら我々は次のことを注意しなくてはならない。それは、暴走温室効果に関する以前の研究 (例えば Komabayashi 1967, 1968 ; Ingersoll 1969; Kasting 1988; Abe and Matsui 1988) は、大気の動的挙動を明らかにすることを目的にしたものではないし、不安定プロセスや前述のような効果の存在を確かめるものでもないということである。彼らは平衡状態にある大気を考察して、その状況下で海洋が存在するための条件を得た。Plass(1961) や Gold(1964) の不安定性の理論から、これら定常状態の考察を区別するために、以下では平衡状態において海洋が存在できない大気状態のことを暴走温室効果状態にある大気と呼ぶことにする。この論文の目的は暴走温室効果を引き起こす大気構造を調べることである。しかし

ながら我々はこの問題に取り組む前に、もうひとつの注意をしておかなくてはならない。我々は平衡状態にある海水蒸発について3つの場合に分けることができる (Abe 1988)。まず最初に、水の総質量が十分ではない場合がある。この場合、表面温度によって決まるある値よりも惑星の水の質量が少ないため、惑星に存在するすべての水は大気に含まれる。2つ目に、熱力学的に地表に液体の水が存在できない場合がある。すなわち地表面温度が水の臨界温度よりも高いと、定義により海水は存在しないということである。しかしながらこれら2つの場合では、水蒸気の温室効果は本質的ではない。ここで十分な吸収体 (例えば二酸化炭素) が存在していると仮定すると、たとえ水蒸気が赤外線を透過することがあっても、これらの大気状態が現れてくる。これらは“暴走温室効果”という用語に相応しくない場合である。3つめの場合がこの論文における我々の議論の焦点である。以下に述べるように、水の質量や臨界点、または両方を考慮することによってではなく、大気の放射特性を考慮することによって海洋が存在できないような平衡状態を定義することが可能である。この場合、水蒸気の赤外吸収は海水を蒸発させる最も重要な役割を担う。水の質量や水の臨界点、または両方の成分にかかわらず、平衡状態において海洋が存在できないこの3つ目の場合を暴走温室状態にある大気と呼ぶことにする。暴走温室状態の存在は Kobabayashi (1967,1968), Ingersoll (1969) 等によって数学的に論証されている。彼らは、海洋と平衡状態にある大気に F_{IRtop}^{\uparrow} の上限値があることを発見した。このことは入射太陽フラックスが上限値を超えたときに海洋と大気は平衡状態を保つことができないことを意味する。海洋はその質量に係わらず蒸発をしなくてはならず、大気は暴走温室状態に突入する。Ingersollによって用いられたモデルは非常にシンプルだ。それは放射平衡状態にある灰色成層圏のみからなる。海が存在条件は対流圏界面における水蒸気は飽和水蒸気圧によって与えられるという仮定で置き換えられる。Kobabayashi(1967,1968) は水蒸気大気を想定した、ただひとつの成分からなる同様の単純なモデルを組み立てた。以下の記述では、Komabayashi と Ingersoll によって得られた外向き赤外放射の上限値を Komabayashi-Ingersoll 限界と呼ぶことにする。

暴走温室状態に関する更なる研究が最近ではより厳密な放射過程・熱力学的過程を考慮し対流圏まで範囲を拡張したモデルを用いて行われている。これらのモデルの結果は、暴走温室効果が F_{IRtop}^{\uparrow} の特異な振る舞いとして得られることを示している。Abe と Matsui の結果は F_{IRtop}^{\uparrow} が $305Wm^{-2}$ に達したとき、大気と海は平衡状態で共存することができないことを示した。Kasting の結果も似たものであり、 $400 \leq T_s \leq 1500K$ の範囲において、は $309Wm^{-2}$ の値を保持する。つまり T_s は F_{IRtop}^{\uparrow} が $300Wm^{-2}$ 周辺で極端な変化をし、入射太陽フラックスがこの値を越えて上昇すると、海洋は蒸発してしまう。これらの研究を再検討することによって、暴走温室状態が発生する可能性は漸近値や上限値といった F_{IRtop}^{\uparrow} の挙動における特異点の存在を探索することによって調べられることがわかる。以下では、我々はこれらの特異点を大気の“射出限界”と呼ぶことにする。射出限界よりも大きな太陽放射が流入してくる大気を暴走温室状態と見なすことができる。以下の節では、我々

は射出限界が現れるような大気構造を明らかにすることにする。Abe と Matsui, Kasting で見られたように漸近値の存在は対流圏を含んだより複雑なモデルにおける Komabayashi-Ingersoll 限界に対応しているように見える。しかしながら不幸なことに、これらのモデルにおける熱力学的、放射過程の扱いはまったく複雑であり何が正確に起こっているのかを追うことは容易なことではない。第2節で、我々は放射平衡にある成層圏と適切な湿潤断熱減率にある対流圏の一次元大気モデルを紹介することにする。第3節では、大気構造が作り出す射出限界の種類を解明してみることにする。Abe と Matsui の際現れた漸近値の要因は Komabayashi-Ingersoll 限界のそれとは完全に異なっているということが明らかにされるであろう。

A.3 モデル

ここで採用したモデルは以下で詳細を記すことにする。それはいわゆる、一次元放射対流平衡モデルである。Komabayashi (1967,1968), Ingersoll (1969), Kasting (1988), Abe and Matsui (1988) のモデルと我々のモデルとの比較は第1テーブルに要約してある。ここで重要な点は、系統的論述は非常に単純なのだが、我々のモデルでは、放射平衡にある成層圏は Ingersoll (1969) のものに似ていて、対流圏の放射・熱力学的過程は Kasting (1988) と Abe and Matsui (1988) のものを考慮に入れているということである。パラメーターの値は第2テーブルで要約した我々の計算時に使った。

大気の構成成分

大気は2つの成分(非凝結性成分と凝結性成分の気相)で構成されていると仮定する。これらの成分は理想気体として振舞う。凝結性成分は仮想的な成分であり、気液平衡曲線を実際の水のそれで近似する。凝結性成分は液相と気相を持つが、固相は持たない。1モルあたりの潜熱 l , 凝結性成分の気相のモル比熱 C_{pv} , 非凝結性成分のモル比熱 C_{pn} は一定であり、温度に依らないと仮定する。 l は一定であるから、凝結性成分の液相の比熱は C_{pv} と等しく、臨界点は存在しない。我々はさらに液相体積を無視し、クラウジウス・クラペイロンの関係式より飽和蒸気圧 p^* を

$$p^* = p_{v0}^* \exp\left(-\left(\frac{l}{RT}\right)\right)$$

と与えた。 l と p_0^* の値は Eisenberg and Kauzmann (1961) で論述された公式と表を近似するように与えた。我々是非凝結性成分の分子質量 m_n は凝結性成分の分子質量 m_v と等しいと仮定した。この簡素化によって、平均分子質量 \bar{m} が非凝結性成分の混合比から独立になり、計算と解釈がより簡単になる。我々のモデルの定式化では、臨界点 ($T_c = 647.1\text{K}$) の存在を含めなかった。なぜならその存在は (Kasting 1988, Fig 7) の漸近特性に影響がないようであるからである。以下では、

時によって凝結性成分を“水”, その気相を“水蒸気”, 気液平衡曲線を飽和水蒸気圧曲線と呼ぶ.

A.3.1 放射輸送

大気は太陽放射を透過すると仮定する. 赤外吸収係数は一定で, 波長から独立(灰色)である. しかし非凝結性成分は第3e節のそれを除いて透明とする. 放射散乱の影響は考慮に入れていない. 光学的深さ τ は次のように定義される.

$$d\tau = (\kappa_v x_v m_v + \kappa_n x_n m_n) \frac{dp}{mg} \quad (19)$$

ここで p は圧力 g は重力加速度, κ_v と κ_n は非凝結性, 凝結性成分の吸収係数, $x_v^* = p^*(T)/p$ と x_n は飽和した凝結性成分および非凝結性成分のモル分率である. 放射輸送方程式はエディントン近似によって積分される. 上向き, 下向き放射流束密度 $F_{IR}^\uparrow, F_{IR}^\downarrow$ は次のように書かれる.

$$F_{IR}^\uparrow(\tau) = \pi B(\tau) - \int_{\tau_b}^{\tau} \frac{d}{d\tau'} (\pi B(\tau')) \times \exp\left(-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right) \quad (20)$$

$$F_{IR}^\downarrow(\tau) = \pi B(\tau) - \int_0^{\tau} \frac{d}{d\tau'} (\pi B(\tau')) \times \exp\left(-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right) - \pi B(0) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right) \quad (21)$$

ここで $B \equiv \sigma T^4/\pi$ は黒体線強度, σ はステファン・ボルツマン定数, τ_b は全大気の光学的深さである. $F_{IRtop}^\uparrow \equiv F_{IR}^\uparrow(0)$ に注意しておく.

A.3.2 対流圏の構造

対流圏では飽和していると仮定する. 対流圏における温度減率は湿潤偽断熱減率であると仮定して

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{moistpseudoadiabat} = \frac{\frac{RT}{\rho c_{pn}} + \frac{x_v^* l}{x_n p c_{pn}}}{x_n + x_v^* \frac{c_{pv}}{c_{pn}} + \frac{x_v^* l^2}{x_n RT^2 c_{cn}}} \quad (22)$$

で与えられる. 対流圏界面は次のとおりに決定される. 大気の底における非凝結性成分の分圧 p_{n0} と表面温度 T_s を与えると, $T(p)$ と $x_v(p)$ は大気上端まで (4) を積分することによって得られる. 正味放射フラックスの収束は (2) と (3) と使用することによって計算することができる. 十分に気温の低い大気の上部に正味収束が正になる高度が存在するであろう. 対流圏の位置は, この高度に取る.

A.3.3 成層圏の構造

成層圏は放射平衡にある. 成層圏にある凝結性成分のモル分率は一定で, 対流圏界面の値と等しい. τ に関する温度構造は F_{IRtop}^\uparrow をパラメーターとしてただちに (2) と (3) から得られる.

$$\pi B = \frac{1}{2} F_{IRtop}^\uparrow \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (23)$$

(1) の方程式もただちに積分され, 次のように与えられる

$$\tau = (\kappa_v x_v m_v + \kappa_n x_n m_n) \frac{p}{\bar{m}g} \quad (24)$$

$$= [\kappa_v m_v p^*(T_{tp}) + \kappa_n m_n (p_{tp} - p^*(T_{tp}))] \frac{p}{p_{tp}} \frac{1}{\bar{m}g} \quad (25)$$

ここで添え字の 'tp' は対流圏界面での値を表している. (7) 式を使うことによって (5) 式の τ を p で置き換えると, 与えられている F_{IRtop}^\uparrow に対して p に関する成層圏の温度構造が得られる. ここで p_{tp} はパラメーターのままである, すなわち成層圏と対流圏が連続になるように, p_{tp} の値を決める. ここで $\kappa = 0$ であるとする, Ingersoll の成層圏モデルが得られる. $\kappa = 0$ の場合, (5) 式と (7) 式から T は p/p_{tp} のみの関数であり, 対流圏構造を議論することなくその関数式はただちに決まる. さらに言えば, $x_n = 0$ のとき, Komabayashi のモデルが得られる.

A.4 結果と議論

A.4.1 Komabayashi-Ingersoll 限界

当分の間は, $\kappa_n = 0$ の場合に制限してみよう. 我々のモデルの成層圏は Ingersoll のモデルとまったく同じであり, したがって Komabayashi-Ingersoll 限界も持つ. Komabayashi-Ingersoll 限界の導出は最近 Goody and Yung (1989) によって記述された. この節ではもう一度それを導出することによって, Komabayashi-Ingersoll 限界の存在の理由が詳しく説明され, 我々の Komabayashi-Ingersoll 限界の値が計算される. (5) 式と対流圏における (7) 式の値を求めることによって, 次の結果を得る.

$$\frac{1}{2} F_{IRtop}^\uparrow \left(\frac{3}{2} \tau_{tp} + 1 \right) = \sigma T_{tp}^4 \quad (26)$$

$$\tau_{tp} = \kappa_v p^*(T_{tp}) \frac{1}{g} \frac{m_v}{\bar{m}} \quad (27)$$

τ_{tp} を消去して T_{tp} を得るために, $\tau_{tp} - T_{tp}$ 平面上に (8) 式と (9) 式をプロットすると便利である. Fig.1 から容易に見て取れるように, F_{IRtop}^\uparrow がある一定値を越えたとき, (8) の曲線と (9) の曲線は全く交わることがない. この F_{IRtop}^\uparrow の値が Komabayashi-Ingersoll 限界である. Komabayashi-Ingersoll 限界が出現する理由はいまや非常に

明快である。放射平衡を満たすために必要な吸収体量 (8) と気液平衡を満たすのに必要な吸収体量 (9) が矛盾を引き起こす。Komabayashi-Ingersoll 限界を上回る外向き放射を放つためには、大気の温度が十分に高くなくてはいけないのであるが、しかしそのような温度における気液平衡から得られる吸収体によって光学的厚さは要求される放射を許すことができないほど厚くなる。この矛盾の原因は飽和水蒸気圧曲線の形にある。

我々のモデルのパラメーターからはKomabayashi-Ingersoll限界の値として 385Wm^{-2} 、またこれに対応する対流圏界面温度として 255K を得る。(8)式と(9)式を見て明らかのように、Komabayashi-Ingersoll限界の値はパラメーターの選択に依存する。例えばIngersoll(1969)によって $321 \sim 655\text{Wm}^{-2}$ の範囲の値が求められた。

Fig.2では F_{IRtop}^\dagger に関する T_{tp} の挙動が示されている。 F_{IRtop}^\dagger の値がKomabayashi-Ingersoll限界よりも小さいとき、 T_{tp} の2つの解がある。Ingersollの議論に従うと、成層圏内に過飽和領域が存在することになるので、我々は大きい方の T_{tp} を解として選択してはいけない。適していなかった解はFig.2の破線で示されている。

Komabayashi-Ingersoll限界は対流圏構造によらない存在であるという意味で極端に強い限界である。もし成層圏のみが放射平衡の状態であり、成層圏の底が飽和しているとすると、この極限が出現する。対流圏構造に対して暗に想定されている唯一の条件は対流圏界面が飽和しているということである。飽和の条件は対流圏界面において相対湿度を与える条件に弱めることができる。 h を相対湿度としよう。(9)の方程式は次のように書きなおされなくてはならない。

$$\tau_{tp} = \kappa_v h p^*(T_{tp}) \frac{1}{g} \frac{m_v}{\bar{m}} \quad (28)$$

$h \leq 1$ で固定してやると、 F_{IRtop}^\dagger の極限值が出てくる。吸収体の量を調節する事によってKomabayashi-Ingersoll限界を取り除くには、(10)のように対流圏界面の条件を緩めればよい。また h の温度依存性によって、 $p^* \sim \exp(-l/RT)$ の温度依存性が打ち消されればよい。言い換えると、極端に乾燥した成層圏を作り出す動的過程が存在しなくてはならない。

最後に、komabayashi-Ingersoll限界の導出が吸収体と温度間の関係が極めて単純に表現されているという事に依存していることに注意しなくてはならない。赤外吸収係数が波長に依存する場合、すなわち大気が灰色ではない場合、吸収体量はFig.1で示したような簡単な手法で決定することはできない。

$p_{n0} = 10^5 \text{Pa}$ の時の F_{IRtop}^\uparrow と T_s の関係性

さて対流圏を含む平衡構造を決定することとしよう. この節では大気の下における非凝結性成分の分圧 p_{n0} を Kasting (1988) の時と同じ値である 10^5Pa に固定する. この値は大まかに現在の地球の地表面圧力と等しい. この節では, まだ $\kappa_n = 0$ の条件のままにする.

計算された T_s と F_{IRtop}^\uparrow の関係性は Fig.3 に示されている. モル分率と温度の鉛直構造は Fig.4 と Fig.5 に示されている. Fig.4 では鉛直座標は圧力 p で, 一方 Fig.5 では光学的深さ τ である.

Fig.3 で重要な点は 2 項目ある. 一つ目は F_{IRtop}^\uparrow の最大値は Komabayashi-Ingersoll 限界に達しない. 二つ目は, 地表面温度が 400K より高いとき F_{IRtop}^\uparrow の値は一定値 (約 293Wm^{-2}) をとる傾向がある. F_{IRtop}^\uparrow は我々のモデルにおいて Abe and Matsui (1988) や Kasting (1988) のモデルのような同じような振る舞いで漸近値を持つ.

さて Fig.3 の特徴を詳しく注意して観てみよう. Fig.5 は T_s が 300K を越えたとき全大気的光学的深さが 1 より高くなるということを示している. それゆえに T_s が十分に 300K よりも高いとき, F_{IRtop}^\uparrow は直接的に T_s に関係しているのではなく, $\tau = 1$ あたりの温度構造に関係しているのである. 従って, T_s と F_{IRtop}^\uparrow の関係性を理解するためには T_s の変化に伴う $\tau = 1$ 近傍の温度構造の変化を研究することが必要である. Fig.4a から T_s が高くなるにしたがって, 温度構造 $T = T(p)$ が飽和水蒸気圧曲線 $T = T^*(p)$ に近づいていくことが見て取れる. 同様に, 水蒸気モル分率が 1 に近づく (Fig.4b). F_{IRtop}^\uparrow へのこの温度構造の役割を理解するためには, 光学的深さから見た構造 $T = T(\tau)$ に書き換えてあげる必要がある. しかしながら方程式 (1) は $x_v \rightarrow 1$ で極限をとった時, $\tau = \frac{\kappa_v p}{g}$ であることを表している. 従って, たとえ温度構造を τ 座標で示した時でも, ある曲線に温度構造が近づくという特徴は変化しない. 実際に Fig.5a では τ に関する温度分布は T_s が上昇するにつれて極限的な曲線に近づく. 結果として, F_{IRtop}^\uparrow の値を決定する $\tau = 1$ 近傍の温度構造は T_s に依存していないのである.

前述の議論を確かめるために, 水蒸気だけで構成されている大気の T_s と F_{IRtop}^\uparrow 間の関係性を Fig.3 に示した. これは温度分布と水蒸気分布が飽和水蒸気圧曲線によって与えられる場合のものである. F_{IRtop}^\uparrow の漸近値が水蒸気大気によって再現されているのは明らかに見て取れる.

Fig.3 から F_{IRtop}^\uparrow の上限値または下限値をもたらす理由を決めることができる. それは $\tau \sim 1$ 近傍の対流圏減率の大きさである. 第一に, 固定した T_s に対して, 水蒸気大気から決定される F_{IRtop}^\uparrow の値が F_{IRtop}^\uparrow の下限値である. 第二に, 非凝結性成分を考慮した場合には $T_s \geq 300\text{K}$ で, $\tau \sim 1$ であるとき, T_s が上昇するにつれて F_{IRtop}^\uparrow は減少する. どちらの場合も水蒸気量は増加するにつれて F_{IRtop}^\uparrow が減少するという事は注意すべきだ. (2) によれば, τ に関する温度放射 B の勾配の積分値で F_{IRtop}^\uparrow は表される, つまり F_{IRtop}^\uparrow は dT/dp が減少するにつれて小さくなって

いくのである。ここで成層圏の寄与を無視することとしよう。湿潤断熱減率 dT/dp の平均値は水蒸気の実分率が大きくなるにつれて小さくなる。この傾向は光学的深さに対しての減率 $dT/d\tau$ はさらに強くなる。それは質量あたりの光学的深さ $d\tau/dp$ が水蒸気の実分率が増加するにつれて大きくなるからである。このように水蒸気の増加が、結果として F_{IRtop}^\uparrow を小さくする $dT/d\tau$ をより小さくさせるのである。

F_{IRtop}^\uparrow の漸近特性について、Kasting (1988) はこのような温度範囲では、湿潤対流層はより厚くなり、大気はすべての赤外スペクトルを通さなくなると説明した。圧力が 0.2 ~ 0.3 bar 下である大気領域のみが宇宙空間への放射が許される。したがって、 T_s が増加するにつれて対流層がより厚くなったとしても、外向き赤外放射にはなんの影響もないのである。Kasting はまた温度構造が飽和水蒸気圧曲線に近づくということも指摘した。この傾向については Abe and Matsui (1988) によっても指摘されている。しかしながらこれらの説明ではそのメカニズムのたった半分しか記述したことにしかない。本当に重要なことは τ に関しての温度構造が固定されていることにある。放射過程に関して、彼等は漸近的な温度構造になにも意味づけをしていないのである。

F_0 が $353 - 293 \text{ Wm}^{-2}$ の間にあるとき、放射平衡の解が 2 つある。1 つは対流圏界面圧力が高く、 T_s が低くて、 x_v が小さいとする解であり、もう一方は対流圏界面圧力は低く、 T_s が高くて、 x_v が大きいとする解である。これら 2 つの解では対流圏界面において温度 T_{tp} と光学的深さ τ_{tp} は等しい。これら 2 つの解は Fig.2 において同じ点であることに注意する。またこれら 2 つの解の安定性についての議論は現在のモデルの目的ではないということも断っておく。 T_s の増加に対して F_{IRtop}^\uparrow が減少するという類の平衡解は不安定ではないかと考えてしまう者もいるかもしれない (例えば Komabayashi 1967)。しばしば議論が次のような形で行われる、それは流入してくる太陽フラックスを固定するという条件で、 T_s が微妙に増加することで外向き赤外放射が減少し、さらに表面温度が増加するといった議論である。しかしながらそのような議論は 2 つの暗黙の仮定を含んでいる。1 つめは、流入する熱フラックスと釣り合っていない定常状態のまわりの動的挙動を支配する方程式を、大気 - 海洋構造が“平衡”にある状態を支配する方程式に特定したことである。この仮定は物理的過程の時定数を考慮した後のみで受け入れられるものである。 T_s が微妙に増加することによって F_{IRtop}^\uparrow が上昇するということは十分に可能性がある、なぜなら新しい T_s と平衡をとる温度構造と湿度構造が成り立つには少々時間がかかるからである、すなわち成層圏は温められ、対流圏の高度が減少するということだ。二つめの仮定は T_s の初期摂動がなんの制約もなく生じるということだ。摂動はゼロ・エネルギー擾乱ではないのでこれは明らかではない、つまりそれを生じさせるには余分のエネルギーが必要である。

A.4.2 p_{n0} が変化するときの F_{IRtop}^\uparrow と T_s の関係; 対流圏を持つ場合の Komabayashi-Ingersoll 限界

前節では水蒸気量が減少するにつれて F_{IRtop}^\uparrow の値が増加するということが述べられた。以下では、我々は大気底部での非凝結性成分の分圧 p_{n0} を変え、水蒸気の実分率が変化した状況を実現させる。他の状態は 3b 節のものと同じである。Fig.6 は様々な p_{n0} に対しての T_s と F_{IRtop}^\uparrow の関係を示している。同じ T_s の値で、 p_{n0} とともに F_{IRtop}^\uparrow が実際に増加しているということに気づかれるかもしれない。固定した T_s において、 p_{n0} が大きくなるということは各高度での水蒸気の実分率がより小さくなることを意味する。したがって減率 $\frac{dT}{dp}$ と $\frac{dT}{d\tau}$ もより大きくなる。

Fig.6 では、 $p_{n0} = 10^7$ Pa の時には F_{IRtop}^\uparrow の最大値が Komabayashi-Ingersoll 限界に達している。逆に p_{n0} が小さいとき、より低温のときから飽和水蒸気圧曲線が F_{IRtop}^\uparrow を支配していて、 F_{IRtop}^\uparrow は容易に水蒸気大気の漸近値に近づく。

T_s を固定して、 p_{n0} が増加するにつれて、全大気の光学的深さが減少していることを計算は示している。 $p_{n0} = 10^8$ Pa に対する全光学的深さは $p_{n0} = 10^4$ Pa のときの値の約半分である。 p_{n0} を大きくすると、さらに水蒸気の実分率が小さくなり、それによって減率が大きくなる。その結果、鉛直平均した大気温度が低くなり、水蒸気量は減少させられてしまうのである。

c_{pn} が大きくなったときの F_{IRtop}^\uparrow と T_s の関係 ; 他の射出限界

前節で見た通り、対流圏の減率が増加するにつれて F_{IRtop}^\uparrow は増加する。水蒸気の実分率が減少するにつれて、湿潤熱断減率は乾燥熱断減率に近づくのであるが、しかしこの値を越えることができない。したがって、乾燥熱断減率によって決められた F_{IRtop}^\uparrow の上限値が存在するはずである。Fig.6 で Komabayashi-Ingersoll 限界が観察されたということは、komabayashi-Ingersoll 限界が乾燥熱断減率によって決められる上限値よりも小さいはずであることを意味する。もっと大きい乾燥熱断減率、すなわちより小さな上限値を持つために、この節での計算を $c_{pn} = 4.5R$ で行った。

Fig.7 は T_s と F_{IRtop}^\uparrow との関係を示している。Fig.7 のすべての F_{IRtop}^\uparrow の値は Komabayashi-Ingersoll 限界よりも低い。これらの解を調べてみると、 $\tau = 1$ の付近で水蒸気の実分率が極端に低く (10^{-3} 以下)、そこでの減率は乾燥熱断減率と見なせる。

p_{n0} が上昇したとき F_{IRtop}^\uparrow がある T_s の範囲でほとんど一定である理由は以前に述べた漸近値の理由と基本的には同じである。 $\tau \sim 1$ あたりの τ に関する温度分布は T_s から独立になる。 $x_v = \frac{p^*}{p}$ を (1) 式に代入して、成層圏の効果を無視すると、光学的深さは次のように表される

$$\tau(p) = - \int_p^0 \kappa_v \frac{p^* m_v}{p \bar{m} g} dp \quad (29)$$

独立変数は対流圏温度が乾燥熱断減率であると見なすことによって p から T へと置き換えることができる.

$$\tau(T) = - \int_T^0 \kappa_v \frac{p^*}{RT} c_{pn} \frac{m_v}{\bar{m}g} dT \quad (30)$$

温度構造は $T = T(\tau)$ という形で書かれるということが (12) 式から見て取れる. 結果として光学的深ささえ与えられれば, 温度が一意的に決まる. 従って, 大気が十分に厚く, F_{IRtop}^\uparrow へ寄与する表面が全くないとき, F_{IRtop}^\uparrow は T_s に依存せず, 一定になる.

A.4.3 非凝結性成分が赤外放射を吸収するときの F_{IRtop}^\uparrow と T_s の関係性

前節までは, 非凝結性成分は赤外放射を透過すると仮定してきた. この節では, 非凝結性成分の赤外吸収の影響について考察する.

Fig.8 は κ_n を $0 \sim 0.01 \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ とし, $p_{n0} = 10^5 \text{Pa}$ と置いて計算した結果を示している. $\kappa_n = 0 \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ の場合は 3b 節で述べられたものと同様である. Fig.8 の興味深い点は, 非凝結性成分による吸収が強くなるにつれて, $T_s = 300 \sim 350 \text{K}$ 付近で現れる F_{IRtop}^\uparrow の最大値は小さくなり, 最終的には消滅する. これは単に T_s が固定されたとき, 吸収が増加することにより F_{IRtop}^\uparrow が減少するからである. しかしながら T_s の値が高いとき, 非凝結性成分が透明である場合のように F_{IRtop}^\uparrow の漸近値はそのままである. それは大気が凝結性成分のみで構成されている構造に近づくにつれて漸近値が現れるからである.

Fig.8 で示されている F_{IRtop}^\uparrow の挙動は以前の研究結果を理解する上で有益である. Abe and Matsui (1988), Kasting (1988) の両者は我々のモデルのものとよく似た F_{IRtop}^\uparrow の漸近値を与えている. しかしながら, 彼等のモデルでは, 我々の前の図に示したような F_{IRtop}^\uparrow の最大値は存在しない, あるいは仮に存在していたとしても, その値の飛び出方は極めて小さい. ここで示されている結果から, 最大値が小さいという理由は二酸化炭素由来の吸収を考慮していたからであると考えられる. Abe and Matsui (1988) では最大値は存在しない一方 Kasting (1988) では小さな最大値が現れたという事実は非凝結成分の種類の違いによって説明される. 非凝結性成分を Kasting (1988) は現実空気と考える一方で Abe and Matsui (1988) は純二酸化炭素と考えたのである. 純二酸化炭素で構成されている非凝結性成分は現実空気より吸収係数が大きい.

最後に, この節で我々が仮定してきたものと全く逆の場合について考察してみよう. 凝結性成分 (水蒸気) が透明 ($\kappa_v = 0 \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$) と仮定しよう. Fig.8 の破線部はこの場合の F_{IRtop}^\uparrow と T_s の関係を示す. たとえ表面温度が高くなったときでも, F_{IRtop}^\uparrow はいかなる一定値にも近づくことはない. 我々は例えこの場合でも, p に関する温度構造は T_s が上昇するにつれて, 飽和蒸気曲線に近づくことに注意しなくてはならない. κ_n の値が同じであると, 実線 ($\kappa_v \neq 0$) と破線 ($\kappa_v = 0$) の場合の大気構造には違いがほとんどない. 3b 節で議論されてきたとおり, F_{IRtop}^\uparrow の漸近値を

持つためには, τ に関する大気構造が固定されていなければいけない. 温度構造が飽和蒸気曲線に近づくというだけでは不十分なのである.

A.5 結論

飽和した対流圏界面と放射平衡状態にある成層圏をもつ灰色大気の上部から放射される赤外放射 F_{IRtop}^\uparrow に次のような制限がある.

1) F_{IRtop}^\uparrow は表面温度 T_s に対応する黒体放射 σT_s^4 を越えることができない. 黒体放射 σT_s^4 は大気の光学的厚さの薄い極限にあたる.

2) F_{IRtop}^\uparrow は Komabayashi-Ingersoll 限界を越えることができない. Komabayashi-Ingersoll 限界は水蒸気の一定モル分率と飽和した対流圏界面を持つ放射平衡成層圏から放たれる F_{IRtop}^\uparrow の上限値である.

3) 大気全体の光学的厚さが 1 よりも十分に大きい時

- a) F_{IRtop}^\uparrow は飽和水蒸気のみで構成されている大気から得られる値より大きい.
- b) F_{IRtop}^\uparrow は気温減率がほとんど乾燥断熱減率と等しい大気から得られる値よりも小さい. これは大気中の水蒸気のモル分率が極めて小さい場合である.

湿潤断熱減率が飽和水蒸気圧曲線により決められる減率よりも大きいことから, F_{IRtop}^\uparrow の上限値が現れる. また湿潤断熱減率が乾燥断熱減率よりも小さいことから, F_{IRtop}^\uparrow の下限値が現れる. これらの極限値は p_{n0} や T_s に依存していない. これは温度構造が光学的厚さの条件のみで, つまり $T = T(\tau)$ と記述されるからである. T と τ の関数関係は温度構造が圧力の関数 $T = T(p)$ でのみ書き表される気液平衡曲線に近づくときに得られる. これは, 凝結性成分 (つまり吸収物質) の量が圧力の関数 $\tau = \tau(p)$ として記述され, 圧力と光学的深さによってのみ決まる事を意味する.

これらの F_{IRtop}^\uparrow に関する制約によると, 大気の射出限界は以下のように決定される. T_s が極めて低い極限では, F_{IRtop}^\uparrow は項目 1 の上限値とほとんど等しい. 表面温度が高い極限では, 水蒸気のモル分率は 1 になり, F_{IRtop}^\uparrow は項目 3a で定義された下限値に近づく. 大気全体の光学的厚さは 1 よりも十分に大きい, 水蒸気のモル分率は 1 よりも十分に小さい時には, Komabayashi-Ingersoll 限界 (項目 2) または乾燥断熱限界 (項目 3b) が現れる. Abe and Matsui (1988) や Kasting (1988) の結果に現れた F_{IRtop}^\uparrow が T_s に依存しない領域は項目 3a で示した事に対応し, また Komabayashi-Ingersoll 限界とは異なるものである. 暴走温室効果は F_{IRtop}^\uparrow の射出

限界が存在し、入射太陽フラックスがこの値よりも大きいときに出現する。

前述の結論は放射モデルが灰色であるという事実が多分に依存している。 F_{IRtop}^\uparrow の漸近値の存在にとって、大きな τ に対して温度構造が $T = T(\tau)$ という形で書かれることが重要なのである。たとえ放射が灰色でなかったとしても、そのような関係式が得られる良い証拠が得られている。なぜなら Abe and Matsui (1988) や Kasting(1988) の放射過程は灰色でないにもかかわらず、彼らのモデルは F_{IRtop}^\uparrow が T_s に依存しない範囲を見せ示しているからである。彼らの結果とここで提示してきた結果の対応関係の理由はそのような高温・高圧下で、水蒸気の連続吸収帯が主なものになり、その吸収特性が灰色吸収体のものに近くなるからである。

参考文献

- Abe, Y., 1988: Conditions required for water-ocean formation on an earth-sized planet. *Lunar Planet Science XIX*, Lunar Planet Institute, 1–2.
- Abe, Y. and T. Matsui, 1998: Evolution of an impact-generated H₂O-CO₂ atmosphere and formation of a hot proto-ocean on earth. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 3081–3101
- Eisenberg, D. and W. Kauzmann, 1969: *The Structure and Properties of Water*. Oxford University Press, 302pp.
- Gold, T., 1964: Outgassing process on the Moon and Venus. *The Origin and Evolution of Atmospheres and Oceans*. P.J.Brancazio and A. G. W. Cameron, Eds., Wiley and Sons, 249–256
- Goody, R. M. and Y. L. Yung, 1989: *Atmospheric Radiation. Theoretical Basis, 2nd ed.* Oxford University Press, 519 pp.
- Ingersoll, A. P., 1969: The runaway Greenhouse: A history of water on Venus. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 1191–1198.
- Kasting, J. F., 1988: Runaway and moist greenhouse atmospheres and the evolution of Earth and Venus. *Icarus*, **74**, 472–494
- Komabayashi, M., 1967: Discrete equilibrium temperature of a hypothetical planet with the atmosphere and the hydrosphere of one component-two phase system under constant solar radiation. *J. Meteor. Soc. Japan*, **45**, 137–139
- Komabayashi, M., 1968: Conditions for the coexistence of the atmosphere and the ocean. *Shizen*, **23**, 2, 24–31 (in Japanese) .
- Nakajima, S., Y.-Y. Hayashi, and Y. Abe, 1992: A Study on the "Runaway Greenhouse Effect" with a One-Dimensional Radiative-Convective Equilibrium Model, *J. Atmos. Sci.*, **49**, 23, 2256 – 2266
- Plass, G. N., 1961: The influence of infrared absorptive molecules on the climate. *Ann. New York Acad. Sci.*, **25**, 61–71.

B 数式の導出

B.1 飽和蒸気圧の関係式

Clausius-Clapeyron の式 $\frac{dP}{dT} = \frac{l}{T\delta v}$ より

ここで l は 1 モルあたりの潜熱

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T(v_1 - v_2)} \quad (31)$$

ここで v_2 は v_1 に対して非常に微小であるとし, これを無視して v_1 に関する理想気体の状態方程式 $pv_1 = RT$ を (1) に代入すると

$$\frac{dp}{dT} = \frac{lp}{RT^2} \quad (32)$$

この常微分方程式を解くと

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{p^*}{p_{v0}^*}\right) &= -\frac{l}{RT^2} \\ p^* &= p_{v0}^* \exp\left(-\frac{l}{RT^2}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

これにより飽和蒸気圧の関係式が導かれた。

B.2 光学的深さの導出 (凝結性成分と非凝結性成分)

$$d\tau = (\kappa_v x_v m_v + \kappa_n x_n m_n) \frac{dp}{\bar{m}g}$$

を導く. ここで p は圧力, g は重力加速度, $\kappa_v \cdot \kappa_n$ は凝結性成分・非凝結性成分の吸収係数. また $x_v^* \equiv p^*(T)/p$ および x_n は飽和した凝結性成分および非凝結性成分のモル分率である. まず光学的深さは次のように表される

$$d\tau = -(\rho_v \kappa_v + \rho_n \kappa_n) dz \quad (34)$$

凝結性成分, 非凝結性成分, 成分の平均の物質量をそれぞれ n_v, n_n, \bar{n} またそれぞれの密度を $\rho_v, \rho_n, \bar{\rho}$ とする. また, 静水圧平衡の式 $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ を (4) に代入すると.

$$\tau = (\rho_v \kappa_v + \rho_n \kappa_n) \frac{dp}{\rho g} \quad (35)$$

ここでそれぞれの密度を分子質量, 物質質量, 体積であらわすと

$$\rho_v = \frac{m_v n_v}{V} \quad (36)$$

$$\rho_n = \frac{m_n n_n}{V} \quad (37)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m} \bar{n}}{V} \quad (38)$$

(5)-(7) を (4) に代入すると

$$d\tau = \left(\frac{n_v}{\bar{n}} m_v \kappa_v + \frac{n_n}{\bar{n}} m_n \kappa_n \right) \frac{dp}{\bar{m}g} \quad (39)$$

ここでモル分率 x_v, x_n を導入し, (9) に代入すると

$$d\tau = (\kappa_v x_v m_v + \kappa_n x_n m_n) \frac{dp}{\bar{m}g} \quad (40)$$

が得られる.

B.3 $F_{IR}^\uparrow, F_{IR}^\downarrow$ の導出

B.3.1 F_{IR}^\uparrow の導出過程

まず F_{IR}^\uparrow は次のように表される.

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{IR}^\uparrow}{d\tau} = F_{IR}^\uparrow - \pi B \quad (41)$$

この非線形微分方程式を解くわけであるが, まず最初に $\pi B = 0$ とすると

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{IR}^\uparrow}{d\tau} = F_{IR}^\uparrow \quad (42)$$

となる. これを変数分離法で解くと

$$F_{IR}^\uparrow = A \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right) \quad (43)$$

この A を τ に関する関数であるとして (11) 式に代入し, 整理すると

$$\frac{dA}{d\tau} = -\frac{3}{2}\pi B \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right) \quad (44)$$

ここで (14) 式を $\tau \sim \tau_b$ まで τ について積分を実行すると

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \int_{\tau_b}^{\tau} -\frac{3}{2}(\pi B) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right) + A(\tau_b) \\ &= \pi B(\tau) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right) - \pi B(\tau_b) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau_b\right) \\ &\quad - \int_{\tau_b}^{\tau} \frac{d}{d\tau}(\pi B) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right) d\tau + A(\tau_b) \end{aligned} \quad (45)$$

(15) 式を (13) 式に代入して整理する.

$$F_{IR}^\uparrow = \pi B(\tau) - \pi B(\tau_b) \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau_b - \tau)\right] - \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right) \int_{\tau_b}^{\tau} \frac{d}{d\tau}(\pi B) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right) d\tau + A(\tau_b) \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right) \quad (46)$$

ここで $\tau = \tau_b$ では $F_{IR}^\dagger(\tau_b) = \pi B(\tau_b)$ なので

$$A(\tau_b) = \pi B(\tau_b) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau_b\right) \quad (47)$$

これにより

$$F_{IR}^\dagger(\tau) = \pi B(\tau) - \int_{\tau_b}^{\tau} \frac{d}{d\tau} \pi B \times \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau')d\tau'\right] \quad (48)$$

よって示された。

B.4 湿潤偽断熱減率の導出

湿潤偽断熱減率 $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = \frac{\frac{RT}{pc_{pn}} + \frac{x_v^* l}{x_n pc_{pn}}}{x_n + x_v^* \frac{c_{pv}}{c_{pn}}}$ を導くことにする。まず熱力学第一法

則から

$$\delta Q = \delta U + p\delta V \quad (49)$$

ここで断熱過程であることから $\delta Q = 0$ であり (19) 式は次の様に表せる。

$$\delta U = -p\delta V \quad (50)$$

またここで $p\delta V$ を少々変形させて

$$\begin{aligned} p\delta V &= \delta(pV) - V\delta p \\ &= RT\delta n_v + (n_v + n_n)R\delta T - (n_v + n_n)RT\frac{\delta p}{p} \end{aligned} \quad (51)$$

のように表せる。

潜熱 l は蒸発によるエンタルピーの変化であるので l は次のように表せる。

$$l = (\text{気相の内部エネルギー}) - (\text{液相の内部エネルギー}) + p\delta V$$

よって内部エネルギーは次のように表される。

$$U = \int_{T_0}^T C_v n_v dT + \int_{T_0}^T C_v n_l dT - (l - pv_g)n_l$$

ただし v_g は気体 1mol あたりの体積とする。これを整理して計算を進めると

$$\delta U = (n_v C_{Vv} + n_n C_{Vn})\delta T + (l - RT)\delta n_v \quad (52)$$

次にクラジウス・クライペロンの式より微小変化した飽和水上気圧を表すと

$$\frac{n_v + \delta n_v}{n_v + n_n + \delta n_v} (p + \delta p) = p_0^* \exp\left(-\frac{l}{R(T + \delta T)}\right) \quad (53)$$

(22) 式の両辺を Taylor 展開し δn_v について解くと

$$\delta n_v = \frac{l}{RT^2} \frac{n_v}{n_n} (n_v + n_n) \delta T - \frac{n_v}{n_n} (n_v + n_n) \frac{\delta p}{p} \quad (54)$$

よって (20) 式に (21), (22), (24) 式を代入し整理をすると求めるべき湿潤偽断熱減率が導かれる.