

木星の大赤斑の数値計算について  
- 1.5 層浅水方程式系の導出 -  
**Numerical Calculation Model of  
Jupitar's Great Red Spot**  
-developing the expression for 1.5  
layer Shallow Water System -

馬場健聡

BABA Takeaki

北海道大学理学部地球科学科 地球物理学科目  
惑星物理学研究室

Department of Earth Sciences,

Undergraduate School of Science, Hokkaido University.

Planetary Physics Laboratory.

**2009/01/30**

## 要旨

本論文では, 主に木星大赤斑の数値計算モデル, そして数値計算に使われる基本方程式である浅水方程式について調査した結果をまとめる.

Dowling, T. E. , and A. P. Ingersoll, 1989 : Jupiter's Great Red Spot as a Shallow Water System (以下 D.I.1989) で彼らは, 大赤斑の数値計算モデルを表現する基本方程式に回転楕円座標系における浅水方程式を使用している. 浅水方程式は, 水平方向成分に比べ鉛直方向成分が非常に小さい薄膜のような流体を表現する運動方程式と連続の式である. 現在作り上げられている大赤斑を表現するモデルは, 1 層モデルや 1.5 層モデルなど単純なモデルが多い. それらのモデルを理解する上で浅水方程式は非常に重要である.

そして, 単純なモデルだけでは大赤斑を完全に表現することは難しい. なぜなら, 近似したり無視してきた物理量は, 実際はどのように大赤斑に影響しているかわからないからである. より現実に近い複雑なモデルの構築がこれからの大赤斑研究における課題といえるのかもしれない.

## 目次

1	はじめに	4
2	浅水方程式の導出	5
2.1	回転地球上の運動方程式 . . . . .	5
2.2	球座標系で表した運動方程式 . . . . .	8
2.3	質量保存則 . . . . .	13
2.4	摩擦力 . . . . .	15
2.5	乾燥大気の熱力学 . . . . .	17
2.6	基本的な運動方程式系 . . . . .	20
2.7	エネルギー保存則 . . . . .	21
2.8	ベータ平面近似と静力学平衡 . . . . .	27
2.9	浅水方程式の線形化 . . . . .	32
3	木星大赤斑について	35
3.1	Dowling and Ingersoll 1989 基本方程式 . . . . .	35
3.2	計算結果 . . . . .	36
4	まとめ	36
A	付録	40
	謝辞	46
	参考文献	47

## 図目次

1	回転直交座標系 . . . . .	5
2	回転座標系における万有引力 $g^*$ , 重力 $g$ , 遠心力 $\Omega^2 R$ を示した図. 破線は等ジオポテンシャル面を表す. . . . .	7
3	球座標系における各パラメータを示す図. . . . .	9
4	慣性系に固定した単位ベクトル系 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ の方向を示す図. . . . .	10
5	慣性系における単位ベクトル $\hat{i}, \hat{j}$ と回転系における単位ベクトル $i$ の関係図. . . . .	11
6	任意の表面 $S$ と表面に垂直な方向の単位ベクトル $n$ の関係を表す図. . .	13
7	1次元粘性流体の速度分布を表す図. . . . .	16
8	流体素分に働く応力の $x$ 成分を表す図. . . . .	16
9	局所直交座標系の図. . . . .	28
10	非圧縮流体層で設定した各パラメータを示した図. . . . .	29
11	2層流体を表した図. 上層と下層の厚さを $D_1, D_2 (> 0)$ とし, $H = D_1 + D_2$ とする. また, 上端面の変位 $\eta$ と境界面の変位 $\xi$ は, 鉛直上向きを正とする. . . . .	33
12	木星における実際の速度分布を示す図. 縦軸に緯度, 横軸に東西方向の速度分布をとる. 破線が観測された実際の速度分布である. . . . .	37
13	D.I.1989 の計算結果の図. 縦軸を緯度横軸を経度とし, 左の図は自由表面の高さ $g(h + h_2)$ を示している. 右の図は速度分布を示している. . . . .	38
14	この図は回転楕円座標系における任意の点 $A$ の周りの微小体積要素を表す図である. . . . .	40
15	図 14 の点 $A$ で横から垂直に切り口を入れ, その断面を上から見た図である. . . . .	42
16	図 14 の点 $A$ で縦に垂直に切り口を入れ, その断面を横から見た図である. このとき, $x$ 軸, $y$ 軸を設定し, 点 $A(p, q)$ とした. さらに, 線分 $OA$ の長さを $L$ , 焦点を $F$ とした. . . . .	43
17	図 16 と同じ視点で見た図. $d\phi$ の寄与による微小長さを $X$ とした. . . . .	44
18	図 17 の線分 $X$ と原点 $O$ で作られる三角形に注目した図. 下辺を $L(\phi)$ 上辺を $L(\phi + d\phi)$ と設定した. . . . .	45

## 1 はじめに

木星には南緯  $22^\circ$  に大赤斑と呼ばれる, 300 年以上も持続している高気圧性の東西方向に 24000km, 南北方向に 13000km 程の大きさをもつ渦が存在する. 私は, 大赤斑のその壮大さと長年維持し続けているメカニズムに興味を持ち本卒論に勉強したことをまとめた次第である.

大赤斑の数値計算モデルだが, 今現在, 地衡風渦説 (Ingersoll and Cuong, 1981) が最も有力な説である. 地衡風渦説では, 大赤斑が周りの小さな渦を吸収, 合体して, 消散に抗して自己を維持している, と提唱している. そこで, 地衡風渦説を採用している D.I.1989 を読むことにした. D.I.1989 では大赤斑の数値計算モデルを表現する基本方程式に回転楕円座標系における浅水方程式を使用している. 木星はガス惑星であり, 自転により極半径より赤道半径の方が大きい回転楕円体をしているので, D.I.1989 における基本方程式の設定は, 非常に合理的である. 浅水方程式は, 水平スケールに比べ鉛直スケールが非常に小さい薄膜のような流体を表現する運動方程式である. D.I.1989 では木星大気を非常に薄い上層と厚い下層で構成され, 大赤斑は上層に存在しているものと仮定し, 数値計算を行っている. 浅水方程式は大赤斑を表現するモデルで頻繁に使われ, メカニズムを理解する上で非常に重要である.

そこで第 2 章で浅水方程式について調査した結果をまとめ, 第 3 章では D.I.1989 で紹介されている大赤斑の数値計算について理解したことをまとめた. また, 付録では第 2 章までに導いた浅水方程式を回転楕円座標系に変換しようと試みた. しかし, これに関してはまだ導出途中なので, 出来たところまでを載せておく.

本論文が大赤斑を勉強しようと思っている流体力学入門者にとっての手助けになればよいと思う.

## 2 浅水方程式の導出

### 2.1 回転地球上の運動方程式

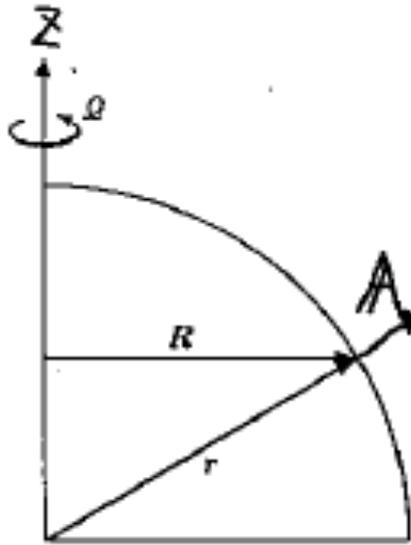


図1 回転直角座標系

回転座標系の運動方程式を導くために、まず回転座標系でのベクトルの時間微分を考えていく。  $A$  を静止直角座標系  $(x', y', z')$  において成分  $(A'_x, A'_y, A'_z)$ ,  $z$  方向に角速度  $\Omega$  をもつ回転直角座標系  $(x, y, z)$  において成分  $(A_x, A_y, A_z)$  をもつ任意のベクトル,  $i', j', k'$  を静止直角座標系における  $(x', y', z')$  方向の単位ベクトル,  $i, j, k$  を回転直角座標系における  $(x, y, z)$  方向の単位ベクトルとする。さらに、回転直角座標系において原点を始点とし  $A$  までのベクトルを  $r$ ,  $z$  軸から  $A$  まで  $z$  軸と垂直になるように設定されたベクトルを  $R$  とする (図1 参照)。静止直角座標系における  $A$  は、

$$A = i' A'_x + j' A'_y + k' A'_z \quad (2.1.1)$$

と書ける。また、回転直角座標系における  $A$  は、

$$A = i A_x + j A_y + k A_z \quad (2.1.2)$$

である。ここで、この回転座標系における時間微分を  $\frac{d_r A}{dt}$  とすると、

$$\frac{d_r A}{dt} = i \frac{d_r A_x}{dt} + j \frac{d_r A_y}{dt} + k \frac{d_r A_z}{dt} \quad (2.1.3)$$

である. そして, 慣性系についての時間微分を  $\frac{d_a \mathbf{A}}{dt}$  とすると,

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{A}}{dt} &= \mathbf{i}' \frac{d_a A'_x}{dt} + \mathbf{j}' \frac{d_a A'_y}{dt} + \mathbf{k}' \frac{d_a A'_z}{dt} \\ &= \mathbf{i} \frac{d_r A_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{d_r A_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{d_r A_z}{dt} + A_x \frac{d_a \mathbf{i}}{dt} + A_y \frac{d_a \mathbf{j}}{dt} + A_z \frac{d_a \mathbf{k}}{dt} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

である.

$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$  より,

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \quad (2.1.5)$$

単位質量を持つ流体素分を考え, ある時刻  $t$  における単位ベクトルを  $\mathbf{r}$  とすると, (2.1.5) 式より,

$$\frac{d_a \mathbf{r}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.1.6)$$

慣性座標系から見た流体素分の速度ベクトルを  $\mathbf{v}_a$ , 回転座標系から見た流体素分の速度ベクトルを  $\mathbf{v}$  とすると,

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.1.7)$$

と表される. さらに (2.1.4) 式より

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d_r \mathbf{v}_a}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_a \quad (2.1.8)$$

(2.1.8) 式に (2.1.7) 式を代入

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d_r}{dt} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.9)$$

$\boldsymbol{\Omega}$  は時間変化しないので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \\ &= \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= -\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}^2 \quad (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R} = 0 \text{ より}) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

よって (2.1.9) 式は

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} &= \frac{d_r \mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d_r \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} \\ &= \frac{d_r \mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

(2.1. 11) 式の  $\Omega^2 R$  は地球上の位置にのみ依存する. したがって万有引力  $g^*$  と遠心力  $\Omega^2 R$  をあわせて重力  $g$  を定義する.

$$g = g^* + \Omega^2 R \quad (2.1. 12)$$

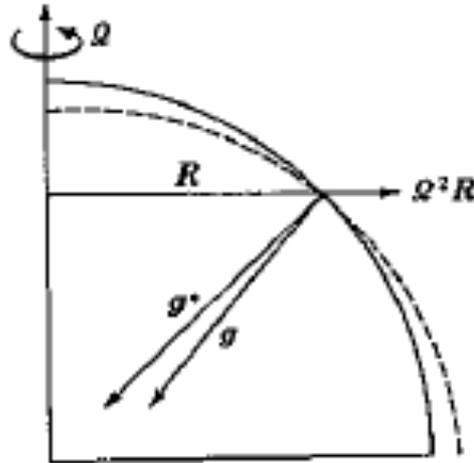


図2 回転座標系における万有引力  $g^*$ , 重力  $g$ , 遠心力  $\Omega^2 R$  を示した図. 破線は等ジオポテンシャル面を表す.

単位質量あたりの運動方程式を考えると,

$$\frac{d_a v_a}{dt} = \Sigma F \quad (2.1. 13)$$

と表される. つまり右辺は単位質量あたりの流体素分に働いている力の総和である. 流体素分に働いている実質的な力が地球がもつ万有引力 ( $g^*$  とおく) と気圧傾度力<sup>\*1</sup> ( $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ ) および摩擦力 ( $F_r$  とおく) だけと仮定すると,

$$\Sigma F = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g^* + F_r \quad (2.1. 14)$$

とかくことができる. (2.1. 13) 式, (2.1. 14) 式を (2.1. 11) 式に代入して,

$$\frac{d_r v}{dt} = -2\Omega \times v - \frac{1}{\rho} \nabla p + \Omega^2 R + g^* + F_r \quad (2.1. 15)$$

<sup>\*1</sup> 気圧傾度力とは水平方向の気圧差によって生じる力のことである.

を得る. ここで, 重力場における単位質量のポテンシャルエネルギー  $\Phi$  を考える.  $\phi$  はジオポテンシャルと呼ばれ,

$$\nabla\Phi = g \quad (2.1.16)$$

で定義される. 最後に, (2.1.12) 式, (2.1.16) 式を (2.1.15) 式に代入する.

$$\frac{d_r \mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla\Phi + \mathbf{F}_r \quad (2.1.17)$$

これが回転座標系における運動方程式である.

ここで, オイラー微分とラグランジュ微分の関係を考える. 例えば, ある時刻  $t_0$  において, ある地点  $(x_0, y_0, z_0)$  にあった流体素分の温度が  $T_0$  であったとする. この流体素分が  $\delta t$  時間に  $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$  という地点に移動し, その間に流体素分自身の温度が  $\delta T$  だけ変化したとする. この  $\delta T$  をテイラー級数に展開すれば,

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z \quad (2.1.18)$$

となる. 両辺を  $\delta t$  で割って  $\delta t \rightarrow 0$  の極限をとると,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.1.19)$$

が得られる. ここで, ある地点での速度ベクトルを  $\mathbf{v}$  として, その各成分を  $(u, v, w)$  とした. 右辺第一項は, ある固定された地点で観測されるべき温度変化の割合で, 時間についての局所微分という. (2.1.19) 式をベクトルを使って表現すれば,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (2.1.20)$$

となる.  $-\mathbf{v} \cdot \nabla T$  は移流項と呼ばれる項で, ある地点での温度が時間的に変化する割合を表す. ちなみに, (2.1.20) 式の関係は温度のみならず, 他の物理量についても成り立つ.

## 2.2 球座標系で表した運動方程式

前節で導いた運動方程式を現実の大気および海洋中の運動に応用する際には, ベクトルで書かれた方程式を各成分にわけて書くと便利である. 全地球を覆うような大規模な運動を扱う際には球座標系  $(\lambda, \phi, r)$  が用いられる. 地球は本来回転楕円体だがここでは球として扱い, 地球に球座標系をあてはめる. すると,  $\lambda$  が経度,  $\phi$  が緯度,  $r$  が地球の中心からの距

離である。いま地球表面の各点において単位ベクトル系  $(i, j, k)$  を定義する。  $k$  は地表面に接する平面に直交し、地球中心の反対の向きを正とする。  $i$  はこの平面上にあり、緯線に沿って東向きを正にする。  $j$  は同じくこの平面上にあり、経線に北向きが正である (図 3)。このとき、速度ベクトル  $u(u, v, w)$  の各成分は、

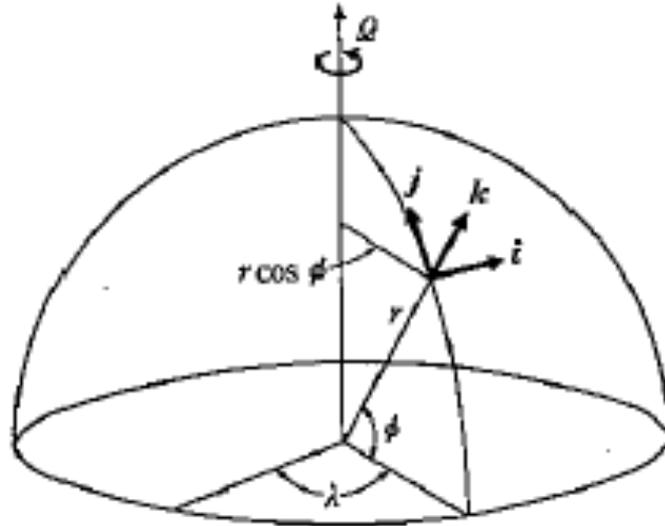


図 3 球座標系における各パラメータを示す図.

$$u = r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = r \frac{d\phi}{dt}, \quad w = \frac{dr}{dt} \quad (2.2.1)$$

となる。ベクトルで書けば、

$$v = iu + jv + kw \quad (2.2.2)$$

である。したがって、加速度は

$$\frac{dv}{dt} = i \frac{du}{dt} + j \frac{dv}{dt} + k \frac{dw}{dt} + u \frac{di}{dt} + v \frac{dj}{dt} + w \frac{dk}{dt} \quad (2.2.3)$$

である。ここで注意すべきは、本節で定義している  $(i, j, k)$  系は地球表面の各点で定義されているので、  $i, j, k$  方向は一定ではなく、地球表面上の位置の関数であることである。例えば、  $\frac{di}{dt}$  について計算する。前節の (2.1. 20) 式を使って、

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial t} + v \cdot \nabla i$$

ここで、球座標系では  $\nabla = (\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial r})$  であり  $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$  なので\*2,

$$\frac{di}{dt} = u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial i}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial i}{\partial \phi} + w \frac{\partial i}{\partial r} \quad (2.2.4)$$

で得られる.  $j, k$  についても、同様に計算できる. (2.2.4) 式を見てわかるように, (2.2.3) 式の加速度を計算するためには,  $i, j, k$  が  $(\lambda, \phi, r)$  に対して, どう変化しているかを知らなければならない. そのために, 慣性系に固定した単位ベクトル系  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  を考え図4のように設定し, これと  $(i, j, k)$  系との関係を見る. 一般的に  $i, j, k$  は,

$$i = A(\lambda, \phi, r) \hat{i} + B(\lambda, \phi, r) \hat{j} + C(\lambda, \phi, r) \hat{k} \quad (2.2.5)$$

という関係がある.

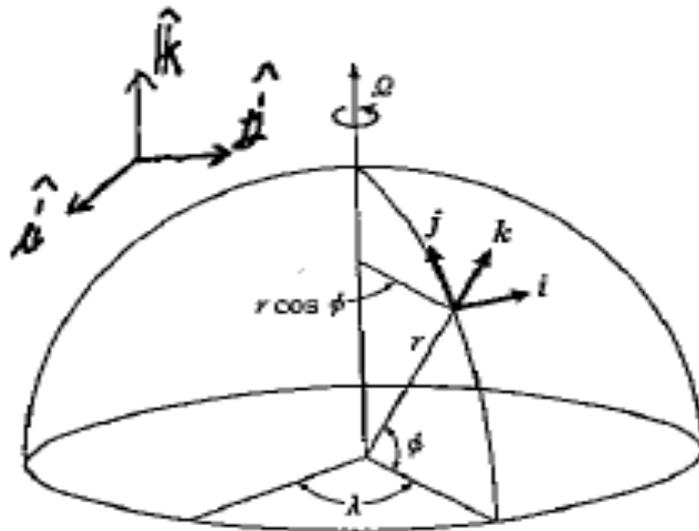


図4 慣性系に固定した単位ベクトル系  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  の方向を示す図.

まず,  $i$  について考える. 地球上どの点をとっても,  $i$  は  $\hat{k}$  の方向の成分を持たない. よって,  $C = 0$  である. 次に  $i$  の方向は  $r$  にも  $\phi$  にもよらず,  $\lambda$  だけによる. したがって, 図5より,

$$i = -\sin \lambda \hat{i} + \cos \lambda \hat{j}$$

である. 同様に,  $j$  については

\*2 これは  $\frac{\partial i}{\partial t}$  がラグランジュ微分で, 回転座標系の立場で見たときの  $i$  の変化の割合だから 0 になるのである.

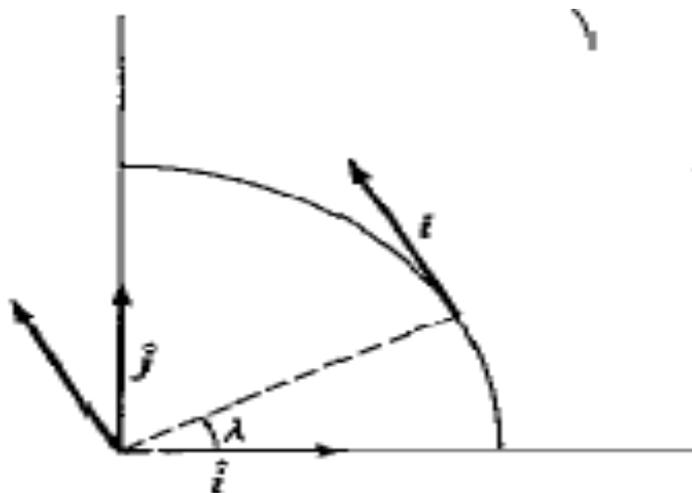


図5 慣性系における単位ベクトル  $\hat{i}, \hat{j}$  と回転系における単位ベクトル  $i$  の関係図.

$$\mathbf{j} = -\sin \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{i}} - \sin \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{j}} + \cos \phi \hat{\mathbf{k}} \quad (2.2. 6)$$

であることがわかる. そして,  $\mathbf{k}$  は,

$$\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \cos \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{j}} + \sin \phi \hat{\mathbf{k}} \quad (2.2. 7)$$

この3つの式から次の関係が導き出せる.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \lambda} = \sin \phi \mathbf{j} - \cos \phi \mathbf{k}, & \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \lambda} = -\sin \phi \mathbf{i}, & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \phi} = -\mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \lambda} = \cos \phi \mathbf{i}, & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \phi} = \mathbf{j} \end{cases} \quad (2.2. 8)$$

したがって,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left( \frac{\tan \phi}{r} \mathbf{j} - \frac{\mathbf{k}}{r} \right) \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -u \frac{\tan \phi}{r} \mathbf{i} - \frac{v}{r} \mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{u}{r} \mathbf{i} + \frac{v}{r} \mathbf{j} \end{cases} \quad (2.2. 9)$$

この関係を (2.2. 3) 式に代入し, 整理すると,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left( \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{wu}{a} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} \frac{vw}{a} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} \right) \mathbf{k} \quad (2.2. 10)$$

が得られる. ただし,  $r = a + z$  であり,  $z \ll a$  であるので, ここでは分母の  $r$  *simeqa* と近似した.

次に 2.1 節の (2.1. 17) 式にあるコリオリ力  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$  を各成分に分けなければならない.  $\boldsymbol{\Omega}$  は  $\mathbf{i}$  に平行な成分を持たず,  $\mathbf{j}$  および  $\mathbf{k}$  の方向の成分はそれぞれ  $\Omega \cos \phi$ ,  $\Omega \sin \phi$  である. したがって,

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -(2\Omega w \cos \phi - 2\Omega \sin \phi) \mathbf{i} - 2\Omega u \sin \phi \mathbf{j} + 2\Omega u \sin \phi \mathbf{k}$$

である. こうして, 球座標系における運動方程式は次のように書かれる.

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{r} + \frac{wu}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + F_\lambda \quad (2.2. 11)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{r} \frac{vw}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2\Omega u \sin \phi + F_\phi \quad (2.2. 12)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \phi + F_z \quad (2.2. 13)$$

(2.2. 11) 式と (2.2. 12) 式の右辺第 1 項において,  $dx = a \cos \phi d\lambda$ ,  $dy = a d\phi$  であり, この  $x$  と  $y$  は式を簡単に書く速記記号のようなもので,  $(x, y, z)$  のような直交直線座標系を使っているわけではない.

### 2.3 質量保存則

いま,  $A$  を任意のベクトルとして, 3次元領域  $V$  内での積分は,

$$\iiint A dV = i \iiint A_x dV + j \iiint A_y dV + k \iiint A_z dV \quad (2.3.1)$$

で定義される.  $V$  の境界面を  $S$  とし, この表面に垂直な方向の単位ベクトル  $n$  をとると (図 6), ガウスの定理 (2.3.2) 式より,

$$\iiint_V \nabla \cdot A dV = \iint_S A \cdot n dS \quad (2.3.2)$$

と表される. 本論文ではガウスの定理の証明は省略する.

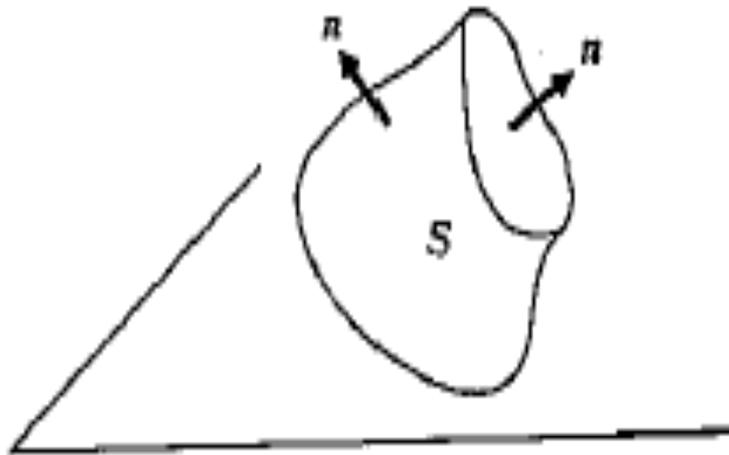


図 6 任意の表面  $S$  と表面に垂直な方向の単位ベクトル  $n$  の関係を表す図.

この定理の応用として  $A$  を速度ベクトル  $v$  とする. そして容積  $V$  の領域では流体粒子の出入りが無く, 表面  $S$  は流れとともに移動する. 容積  $V$  として半径  $r$  の微小球体を取り, 球の中心から表面へのベクトルを  $r$  で表す. この微小容積にガウスの定理 (2.3.2) 式を適

用すると,

$$\begin{aligned}
 V \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} dV \\
 &= \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS \\
 &= \iint \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \boldsymbol{n} dS
 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

と書ける. 容積  $V$  は微小なので  $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$  は表面  $S$  の任意の場所に対して常に同じ値をとると仮定出来るので, (2.3.3) 式は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
 \iint \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} S \\
 &= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \\
 &= \frac{4}{3}\pi \frac{dr^3}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$$= \frac{dV}{dt} \tag{2.3.5}$$

よって,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dt} \right) \tag{2.3.6}$$

つまり, 速度の発散は, その容積の単位時間あたりの変化量にほかならない. 次に  $V$  内の流体の質量を  $M$  とすると,  $\rho = \frac{M}{V}$  である. 質量保存則によれば,  $\frac{dM}{dt} = 0$  でなければならないので,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d}{dt} \ln \rho \\
 &= \frac{d}{dt} \ln \frac{M}{V} \\
 &= -\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

(2.3.7) 式を (2.3.6) に代入すると

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.3.8}$$

これが質量保存則である. ベクトル公式<sup>\*3</sup>  $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho$  を使えば, (2.3.8)

<sup>\*3</sup> これは, 本質的には積の微分公式と同じである.

式は

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3.9)$$

と書くことも出来る。(2.3.9) 式は、空間に固定された単位容積に対して差し引き流入量は、その容積内の密度の時間変化であることを示す。

## 2.4 摩擦力

図7に示すような2枚の平行板の間に挟まれた粘性流体を考える。今、上の平行板が下の平行板に対して一定の速さ  $u_0$  で運動しているならば流体の粘性によって平行板の下表面に働く摩擦力と平行板に働く外力  $F$  が釣りあってなければならない。  $A$  を平行板の面積、  $l$  を2平行板間の距離、  $\mu$  を動粘性係数として、この  $F$  は、

$$F = \mu A \frac{u_0}{l} \quad (2.4.1)$$

である。今は定常状態なので、  $F$  は上の平板が流体の平行板に接する部分に及ぼす力に等しい。また、流体の各層は同じだけの力を自分のすぐ下の層に及ぼしている。よって流体内の単位面積あたりの  $z$  軸に垂直な面の  $x$  方向の応力を  $\tau_{zx}$  とすると、

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

と仮定できる。

次に流体素分に働く摩擦力を考える。図8に示した流体素分を考えると、  $z$  軸に直交している2平行板に働く応力の  $x$  成分は差し引き、

$$\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y \quad (2.4.2)$$

である。したがって単位質量の流体素分に対し働く摩擦力は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

となる。一般的に  $u$  は  $x$  方向にも  $y$  方向にも変化しているから、摩擦力  $F$  は、

$$F = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (2.4.4)$$

である。

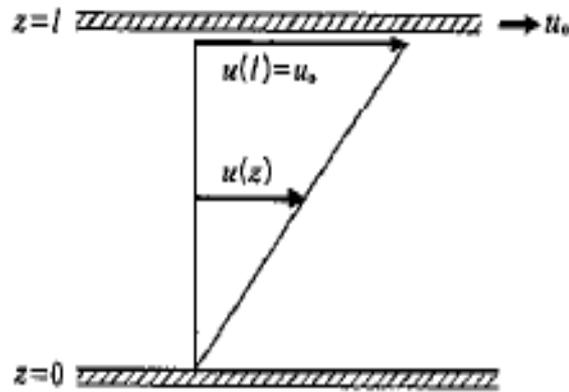


図7 1次元粘性流体の速度分布を表す図.

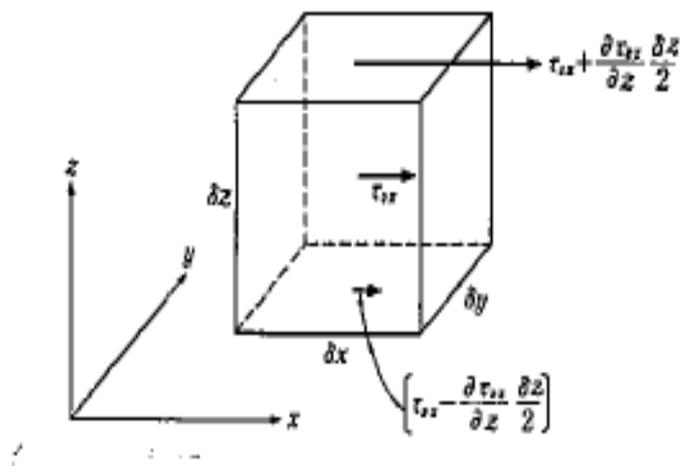


図8 流体素分に働く応力の  $x$  成分を表す図.

## 2.5 乾燥大気の熱力学

ここでは、水蒸気を含まない乾燥大気について取り扱う。まずは、温度  $T$ 、圧力  $p$ 、密度  $\rho$ 、比容  $\alpha (= \frac{1}{\rho})$ 、気体定数  $R$  として理想気体の状態方程式より、

$$p = \rho RT \quad (2.5.1)$$

または

$$p\alpha = RT \quad (2.5.2)$$

と書ける。

次に、熱力学第 1 法則について説明していく。系に加えられた熱量  $dQ$ 、系の内部エネルギーの変化  $dU$ 、系が外部にした仕事  $dW$  として熱力学第 1 法則は、

$$dQ = dU + dW \quad (2.5.3)$$

と書ける。一般的に気体の内部エネルギーは気体の  $p$ 、 $T$ 、 $\alpha$  の関数であるが、分子同士が相互作用をしないと仮定すれば  $T$  だけの関数である。よって、 $dU$  は  $c_v$  を定積モル比熱として、

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT \equiv c_v dT \quad (2.5.4)$$

一方、 $dW$  については、単位質量あたりの気体素分の表面積を  $dS$ 、気体素分が加熱され動いた長さを  $dl$  として、

$$\begin{aligned} dW &= pdSdl \\ &= pd\alpha \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

である。(2.5.3) 式に (2.5.4) 式、(2.5.5) 式を代入して、

$$dQ = c_v dT + pd\alpha \quad (2.5.6)$$

となる<sup>\*4</sup>。さてここで、理想気体の状態方程式 (2.5.2) 式を対数的に微分していく。まず、両

<sup>\*4</sup> 仮に気体中どこも密度変化を起こさないようにして熱が加えられたなら、 $c_v = (dQ/dT)_\alpha$  である。

辺の各変数の微小変化量をとリ、

$$\begin{aligned}
 dp + d\alpha &= dRdT \\
 \ln(dp) + \ln(d\alpha) &= \ln(dR) + \ln(dT) \quad (\text{両辺の対数をとった}) \\
 \ln(dp) + \ln(d\alpha) &= \ln(dT) \quad (R \text{ は定数なので, } dR = 0 \text{ とした}) \\
 p\alpha \ln(dp) + p\alpha \ln(d\alpha) &= RTdT \quad (\text{両辺に (2.5. 2) 式をかけた}) \\
 pd\alpha + \alpha dp &= RdT \left( \frac{dx}{x} = d(\ln x) \text{ より} \right)
 \end{aligned} \tag{2.5. 7}$$

(2.5. 7) 式を (2.5. 6) 式に代入すると、

$$dQ = (c_v + R)dT - \alpha dp \tag{2.5. 8}$$

または

$$dQ = c_p dT - \alpha dp \tag{2.5. 9}$$

が得られる. (2.5. 9) 式では, 定積モル比熱  $c_p (= c_v + R)$  を導入した.

一般に大気中では, 気体素分に熱  $dQ$  が加えられている. 例えば放射, 水蒸気によって放出された潜熱, 熱伝導などである. しかし, 問題によっては, このような加熱の影響は第一近似として省略できる場合がある ( $dQ = 0$  として近似する). このような過程を断熱過程という. この場合, (2.5. 9) 式は,

$$c_p dT = \alpha dp \tag{2.5. 10}$$

となる. そして, (2.5. 3) 式を使って,

$$c_p d(\ln T) = Rd(\ln p) \tag{2.5. 11}$$

となる. (2.5. 11) 式を積分して,

$$T = Cp^{\frac{R}{c_p}} \tag{2.5. 12}$$

が得られる. ここで, 常数を  $C$  と置いた. この常数  $C$  は気体素分によって違う値をとる. 基準圧力を  $p_{00}$  とおき,  $p_{00} = 1000mb$  とする. このときの温度を  $\theta$  とすれば,

$$\theta = T \left( \frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \tag{2.5. 13}$$

となる. この  $\theta$  は温位と呼ばれる量である. ここでこの  $\theta$  について見ていく. (2.5. 11) 式を

変形していくと,

$$\begin{aligned}
 d(\ln T) - \frac{R}{c_p} d(\ln p) &= 0 \\
 d\left(\ln\left(\frac{T}{p^{R/c_p}}\right)\right) &= 0 \\
 d\left(\ln\left(T\left(\frac{p_{00}}{p}\right)^{R/c_p}\right)\right) &= 0 \quad (p_{00}^{R/c_p} \text{ は定数である}) \\
 d(\ln \theta) &= 0 \\
 \frac{1}{\theta} d\theta &= 0
 \end{aligned} \tag{2.5. 14}$$

となる. これからわかることは, その気体素分が断熱変化をしている限り  $p$  と  $T$  は変わっても  $\theta$  の値は変わらない, つまり  $\theta$  は断熱過程における保存量であるということである.

さて, (2.5. 9) 式の両辺を式変形する. まず,  $T$  で割り,

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{T} &= c_p \frac{dT}{T} - \frac{\alpha}{T} dp \\
 &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad ((2.5. 2) \text{ 式より, } \alpha \text{ を消去した}) \\
 &= c_p d(\ln T) - R d(\ln p) \quad \left(\frac{dx}{x} = d(\ln x) \text{ より}\right)
 \end{aligned} \tag{2.5. 15}$$

が得られる. ここで,  $\frac{\partial c_p}{\partial \ln T} = \frac{\partial R}{\partial \ln p} = 0$  なので<sup>\*5</sup>, (2.5. 15) 式は完全微分系をなす. 完全微分系をなしている関数は, 両軸にその関数の変数をとった座標面上でどの経路をとって積分しても同じ値になる. したがって,  $\alpha$  と  $p$  を両軸にとった座標面上で, 閉曲面に沿って (2.5. 15) 式をひとまわり積分すると,

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \tag{2.5. 16}$$

となる. そこで,

$$ds = dQ/T \tag{2.5. 17}$$

で与えられる  $s$  を定義し, エントロピーと呼ぶことにする. エントロピーは, (2.5. 13) 式で定義した温位と簡単な関係式で結ばれる. 以下では,  $s$  と  $\theta$  の関係式を導く. まず, (2.5. 13)

<sup>\*5</sup> これは完全微分系の条件である.

式を対数的に微分する.

$$d(\ln \theta) = d(\ln T) - \frac{R}{c_p} d(\ln p)$$

$$c_p(d(\ln T) - d(\ln \theta)) = R d(\ln p)$$

(2.5. 15), (2.5. 17) 式より  $R d(\ln p) = c_p d(\ln T) + ds$  を代入して,

$$ds = c_p d(\ln \theta) \quad (2.5. 18)$$

この式を積分すると,

$$s = c_p \ln \theta + C \quad (2.5. 19)$$

を得る. すなわち, エントロピーは  $\theta$  だけの関数である.

## 2.6 基本的な運動方程式系

今まで勉強したものをまとめて書く.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p + \nabla \Phi + F_r \quad (2.6. 1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.6. 2)$$

$$p = \rho R T \quad (2.6. 3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \left(\frac{c_p}{c_v}\right) p \nabla \cdot \mathbf{v} + \left(\frac{\rho R}{c_v}\right) \dot{Q} \quad (2.6. 4)$$

一般に乾燥大気の状態および運動を完全に記述するのに必要な変数は,  $\mathbf{v}, p, \rho, T$  の4つである. (2.6. 1) ~ (2.6. 4) の4つの式は相互に独立である. そこで, もし摩擦力  $F_r$  と非断熱  $\dot{Q}$  が独立変数  $t$  と  $x$  (流体素分の位置ベクトル) および  $\mathbf{v}, p, \rho, T$  の関数として与えられるとすれば, (2.6. 1) ~ (2.6. 4) は完全に閉じた方程式系である. これから, 具体的にその意味を説明する.

$\mathbf{v}, p, \rho, T$  の時刻  $t_0$  における初期条件について, いま考えている大気の領域全部にわたって,  $\mathbf{v}, p, \rho$  については  $x$  の関数として与えられているとする. そして, 時刻  $t_0$  における  $T$  の値は, 与えられた  $p, \rho$ , を用いて (2.6. 3) 式から計算できる. そして, 領域の各地点において, 時刻  $t_0$  における  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial t}$  の値は (2.6. 1), (2.6. 2), (2.6. 4) 式の右辺に与えられた初期の  $\mathbf{v}, p, \rho$  の値を代入して計算される. そして, 微小時間  $\Delta t$  だけ経った時刻  $t_0 + \Delta t$  における  $\mathbf{v}$  の値は

$$\mathbf{v}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{v}(t_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) \Delta t \quad (2.6. 5)$$

として計算される. 同様にして,  $t_0 + \Delta t$  における  $p, \rho$  も計算される. これを繰り返すことにより, 将来における場の全ての量  $v, p, \rho, T$  を求めることができるというわけである. ちなみに, もし領域が境界面で限られている場合には, あらかじめ境界条件を指定しなければならない. つまり, この4つの式さえあれば, 乾燥大気の状態および運動を完全に記述するのに必要な変数をすべて求めることができる. よって, これらを基本的な運動方程式系と呼ぶことにする.

## 2.7 エネルギー保存則

2.5 節において, 断熱変化のもとでは温位が保存されることを述べた. 大気中の運動では, それ以外にも, ある条件のもとで保存される量はいくつかある. 以下で述べるエネルギーもその1つである. 運動方程式 (2.6. 1) に  $\rho$  をかけ,  $v$  をスカラー乗積すると,

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] - 2\rho \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \quad (2.7. 1)$$

ちなみに, (2.7. 1) 式の左辺は運動エネルギーの時間微分である. ここで, 単位質量あたりの運動エネルギーを  $K = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$  と定義して, 以下の式を使う.

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = \left(\frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = -\rho g w \\ \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad (2.7. 2)$$

ちなみに, 一番下の式の意味はコリオリ転向力は空気素分<sup>\*6</sup>の運動方向は変化させるが, 運動エネルギーは変化させないということ<sup>\*7</sup>である. 上記の式より

$$\rho \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla K + \rho g w = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \quad (2.7. 3)$$

<sup>\*6</sup> 空気素分とは, 流体を構成する微小流体粒子のことである.

<sup>\*7</sup> コリオリ転向力がする仕事は0であるということである.

が得られる. (2.7. 3) 式の左辺第 2 項以下のように変形した.

$$\begin{aligned}
 \rho \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] &= \rho v_i [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]_i \\
 &= \rho v_i \left[ v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{v} \right]_i \\
 &= \rho v_i \left[ v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right] \\
 &= \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\
 &= \rho v_j v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

ここで,  $\frac{\partial A^n}{\partial x} = nA^{n-1} \frac{\partial A}{\partial x}$  という関係式を使って,

$$\begin{aligned}
 \rho v_j v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \rho v_j \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i^2) \\
 &= \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) \quad \left( \frac{1}{2} v_i^2 = K \text{ なので,} \right) \\
 &= \rho v_j [\nabla K]_j \\
 &= \rho \mathbf{v} \cdot \nabla K
 \end{aligned}$$

このようにして, (2.7. 3) 式の第 2 項は示された.

(2.7. 3) 式の左辺第 3 項を, 質量保存則 (2.6. 2) を用いて, 次のように変形していく.

$$\rho g w = g \rho \frac{dz}{dt}$$

として, 積の微分公式を変形したものを使い,

$$g \rho \frac{dz}{dt} = g \frac{d\rho z}{dt} - g z \frac{d\rho}{dt}$$

2.1 節で述べた  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$  を使い,

$$g \frac{d\rho z}{dt} - g z \frac{d\rho}{dt} = g \frac{\partial \rho z}{\partial t} + g(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho z - g z \frac{\partial \rho}{\partial t} - g z(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho$$

質量保存則  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$  より,

$$\begin{aligned}
 &g \frac{\partial \rho z}{\partial t} + g(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho z - g z \frac{\partial \rho}{\partial t} - g z(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \\
 &= g \frac{\partial \rho z}{\partial t} + g(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho z + g z \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - g z(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho
 \end{aligned}$$

ここで,  $(x, y, z)$  を  $(x_1, x_2, x_3)$  として書き換える.

$$\begin{aligned}
& g \frac{\partial \rho z}{\partial t} + g(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho z + g z \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - g z (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \\
&= g \frac{\partial \rho x_3}{\partial t} + g \left( \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \rho x_3 + g x_3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) + g x_3 \left( v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \rho \\
&= g \frac{\partial \rho x_3}{\partial t} + g \left( \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \rho x_3 + g x_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i - v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \right) \\
&= g \frac{\partial \rho x_3}{\partial t} + g v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rho x_3 + g x_3 \rho \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \\
&= g \frac{\partial \rho x_3}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \rho x_3 \\
&= g \frac{\partial \rho z}{\partial t} + g \nabla \cdot (\rho z \mathbf{v}) \\
&= \left( \frac{\partial \rho g z}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \rho g z \mathbf{v}
\end{aligned}$$

これを (2.7. 3) 式に代入する. ここで, 右辺の式変形を追っていく.

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial K}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) K + \rho g w \\
&= \rho \frac{\partial K}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) K + \left( \frac{\partial \rho g z}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \rho g z \mathbf{v} \\
&= \rho \frac{\partial K}{\partial t} + \left( \frac{\partial \rho g z}{\partial t} \right) + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) K + \nabla \cdot \rho g z \mathbf{v} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\rho K) - K \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial \rho g z}{\partial t} \right) + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) K + \nabla \cdot \rho g z \mathbf{v} \\
&= \frac{\partial \rho (K + g z)}{\partial t} - K \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) K + \nabla \cdot \rho g z \mathbf{v}
\end{aligned}$$

ここで, 質量保存則を使い,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \rho (K + g z)}{\partial t} + K \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) K + \nabla \cdot \rho g z \mathbf{v} \\
&= \frac{\partial \rho (K + g z)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho K \mathbf{v}) + \nabla \cdot \rho g z \mathbf{v} \\
&= \frac{\partial \rho (K + g z)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho (K + g z) \mathbf{v}]
\end{aligned}$$

よって, (2.7. 3) 式は,

$$\frac{\partial [\rho (K + g z)]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho (K + g z) \mathbf{v}] = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \quad (2.7. 4)$$

と表される. さて, (2.7. 4) 式の中身の項の物理的な意味についてである. まず,  $gz$  は単位質量当たりの位置エネルギーを表す. 右辺第 1 項は空気素分が等圧面を横切るとき, 空気の単位体積につき気圧によってなされる仕事を表す. 第 2 項は摩擦力によるエネルギーの散逸を表し, 普通は負の符号を持つ. (2.7. 4) 式は運動方程式から導かれたものであるから, 運動エネルギーと位置エネルギーという機械的なエネルギーにのみ関係している. そこで (2.7. 4) 式に熱的なエネルギーを含めるために, 2.5 節で導いた熱力学第 1 法則を以下のように変形する.

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \\
&= c_v \frac{dT}{dt} - p\alpha^2 \frac{d\rho}{dt} \\
&= c_v \frac{dT}{dt} - p\alpha^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) \\
&= c_v \frac{dT}{dt} - p\alpha^2 (-\nabla \rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho) \\
&= c_v \frac{dT}{dt} - p\alpha^2 (-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}) \\
&= c_v \frac{dT}{dt} + p\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{2.7. 5}$$

(2.7. 4) 式の右辺第 2 項目を  $\mathbf{v} \cdot \nabla p = \nabla \cdot p\mathbf{v} - p\nabla \cdot \mathbf{v}$  と変形して (2.7. 5) 式に加えると,

$$\frac{\partial [\rho(K + gz)]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(K + gz)\mathbf{v}] = -\nabla \cdot p\mathbf{v} - \rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho \dot{Q} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \tag{2.7. 6}$$

と書ける. (2.1. 20) 式を用いて,

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \rho E \mathbf{v} = -\nabla \cdot p\mathbf{v} + \rho \dot{Q} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \tag{2.7. 7}$$

とも書ける. ここに, 系の全エネルギー  $E$  は,

$$E = K + gz + c_v T$$

である. (2.7. 7) 式を座標系に対して固定された体積内で積分する. このときは (2.7. 7) 式の左辺において, 時間微分と空間積分の順序を交換することができる. ガウスの定理 (2.3. 2) 式を使って, 体積積分を面積積分に変換すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho E dV = - \iint \rho E v_n dS - \iint p v_n dS + \iiint \rho \dot{Q} dV + \iint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r dV \tag{2.7. 8}$$

が得られる. ここに  $dV$  は体積要素,  $dS$  は考えている容積をつつむ表面の要素,  $v_n$  は  $dS$  に垂直な速度成分 (外向きを正とする)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  である. (2.7. 8) 式は運動エネルギー, 位置

エネルギー、内部エネルギーの総和  $E$  がいろいろの要因で変化することを示す。右辺第 1 項は境界面を通してのエネルギーの流出<sup>\*8</sup>、第 2 項は境界面において周囲の空気からの圧力に抗して系の体積が膨張するときの仕事、第 3 項は熱の形で系に加えられたエネルギー、第 4 項は摩擦によるエネルギーの損失を表す。したがって、剛体の境界面でかこまれた<sup>\*9</sup> 非粘性流体<sup>\*10</sup>が断熱過程 ( $Q=0$ ) の下で運動する限り、その系の運動エネルギー、位置エネルギー、内部エネルギーの総和は保存される。また特別な場合として、流体が運動していても、その運動が定常である限りは、別の形のエネルギー保存則が成り立つ。それを今から示していく。まず、(2.7. 6) 式に  $\frac{1}{\rho}$  をかけると、

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial t} [\rho(K + gz)] + \nabla \cdot \rho(K + gz)\mathbf{v} \right] = -\alpha \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \quad (2.7. 9)$$

ここでは、運動は定常で、断熱的なので、(2.7. 6) 式の右辺第 2 項、第 3 項は 0 として消した。ここで左辺に注目すると、

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} (K + gz) + \frac{\partial}{\partial t} (K + gz) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\rho(K + gz)\mathbf{v}] \quad (2.7. 10)$$

(2.7. 10) 式第 3 項を積の微分公式を使って変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\rho(K + gz)\mathbf{v}] &= \frac{1}{\rho} (K + gz)\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot [(K + gz)\mathbf{v}] \\ &= \frac{1}{\rho} (K + gz)\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + (K + gz)\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (K + gz) \end{aligned} \quad (2.7. 11)$$

以下に示す通り、(2.7. 11) 式の右辺第 2 項、第 1 項と (2.7. 10) 式の第 1 項を足し合わせると 0 になる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} (K + gz) + \frac{1}{\rho} (K + gz)\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + (K + gz)\nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} (K + gz) + \frac{1}{\rho} (K + gz)\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + (K + gz)\nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.7. 12)$$

$$= -\frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] (K + gz) + \frac{1}{\rho} (K + gz) [\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}] \quad (2.7. 13)$$

<sup>\*8</sup> 単位を計算すると、 $kg/m^3 \cdot J/kg \cdot m/s \cdot m^2 = J/s$  となるので、確かに (2.7. 8) 式右辺第 1 項は単位時間あたりのエネルギーの移動である。

<sup>\*9</sup> 剛体の境界面においては、流体の速度は  $\mathbf{v} = 0$  となる。よって、境界内の流体の速度の足し合わせは 0 となる。

<sup>\*10</sup> 非粘性なので摩擦力は  $F_r = 0$  となる。

積の微分公式を使い, 第 2 項をまとめて,

$$= -\frac{1}{\rho}[\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})](K + gz) + \frac{1}{\rho}(K + gz)[\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] \quad (2.7. 14)$$

$$= 0 \quad (2.7. 15)$$

ここで, (2.7. 12) 式から (2.7. 13) 式への変形は質量保存則 (2.6. 2) 式を使い, 第 1 項を変形した. (2.7. 13) 式から (2.7. 14) 式への変形は積の微分公式を使った. ここに, (2.7. 6) 式から (2.7. 9) 式への変形は示された. ここで, (2.7. 9) 式を以下のように変形する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(K + gz) + \mathbf{v} \cdot \nabla(K + gz) &= -\alpha \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \\ \frac{d(K + gz)}{dt} &= -\alpha \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \\ &= -\alpha \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \end{aligned}$$

ここでこの両辺に,  $c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q}$  を辺々加えると,

$$\frac{d}{dt}(K + gz + c_v T + \alpha p) = \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \dot{Q} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \quad (2.7. 16)$$

が得られる. したがって運動が定常であり ( $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ), 断熱過程 ( $\dot{Q} = 0$ ) であり, かつ摩擦の影響がない ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r = 0$ ) とすれば,

$$K + gz + c_v T + \alpha p = \text{const} \quad (2.7. 17)$$

となる. すなわち各流体粒子につき (2.7. 17) 式で定義されたエネルギーが保存されることになる. 定常な運動では流体粒子が時間とともに動いてできる軌跡と流線\*<sup>11</sup> とは一致するから, 上記のエネルギーは各流線にそって一定である. その一定の値自身は各流線によって違う. (2.7. 17) 式は非圧縮性流体 ( $\rho = \text{一定}$ ) に対して成り立つベルヌーイの法則の一般的な場合である.

本節で導いたエネルギー方程式は, すでに導いた運動方程式系から得られたものであるから, 運動方程式系から得られる以上に新しい情報を加えるものではない. しかしいろいろな流れについて, その力学をエネルギーの見地からみることは有益である. 例えば台風や

\*<sup>11</sup> 流線 (stream line) は, ある瞬間における流れの方向を示す曲線で, 流線の接線の方向がその点における速度ベクトルの方向である. 例えば 2 次元運動において, 速度の 2 成分が  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  で与えられているとすれば,  $\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, t_0)}{u(x, y, t_0)}$  という微分方程式を  $x$  について積分すれば, ある時刻  $t_0$  における流線が描ける.

移動性低気圧が発達または減衰しているとき、その運動エネルギーは増加または減少しつつあるわけである。その運動エネルギーの源はなんであるか、どのような過程によって運動エネルギーが変化するかなどを調べることによって、その現象に対する理解を深めることができる。

## 2.8 ベータ平面近似と静力学平衡

現実の大気は密度は高さとともに減少しているが、本節では非圧縮流体を考える。非圧縮流体は密度  $\rho$  の時間変化、摩擦力  $F_r$  が 0 なので、運動を記述する運動方程式系は、(2.1. 17) 式、(2.3. 8) 式を変形して、以下のように書かれる (2.1 節, 2.3 節参照)。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{g}\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.8. 1)$$

上記 2 式の従属変数は  $\mathbf{v}$  と  $p$  の 2 つである。運動が全地球をおおっているようなスケール有的时候には、2. 2 節で導いた球座標系を使う必要がある。しかし運動が比較的せまい領域に限られている場合には、次のような局所直交直線座標系を使うことができる。すなわち図 9 に示すように、等重力ポテンシャル面である平均海面上に原点  $O$  をとり、原点から鉛直上方 (その場の重力と反対の方向) に  $z$  軸をとる。原点で等ポテンシャル面に接する平面をとり、この平面上で  $x$  軸を東向きに、 $y$  軸を北向きにとる。

コリオリ力のパラメーター  $f \equiv 2\Omega \sin \phi$  については、原点  $O$  の緯度を  $\phi_0$  として、 $f$  を  $\phi_0$  の近くでテイラー級数展開すると、

$$f = 2\Omega \sin \phi_0 = 2\Omega[\sin \phi_0 + (\phi - \phi_0) \cos \phi_0 + \dots] \quad (2.8. 2)$$

となる。ところが  $\phi - \phi_0 \approx y/a$  であるから ( $a$  は地球の半径)、

$$f = 2\Omega \sin \phi_0 + (2\Omega \cos \phi_0) \frac{y}{a} \quad (2.8. 3)$$

である。運動の代表的な水平スケールを  $L$  とすれば、 $\frac{L}{a} \ll 1$  のときには、(2.8. 3) 式の右辺の第 2 項までをとって、 $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$ 、 $\beta = \left(\frac{2\Omega}{a}\right) \cos \phi_0 \approx \frac{df}{dy}$  として、

$$f = f_0 + \beta y \quad (2.8. 4)$$

と近似する。局所直交直線座標系を用い、かつ  $f$  を (2.8. 4) 式のように近似したものを、ベータ平面近似とよぶ。  $L$  が  $a$  よりさらに小さいときには、(2.8. 4) 式で  $\beta$  項を省略し、 $f \approx f_0$  とすることもある。

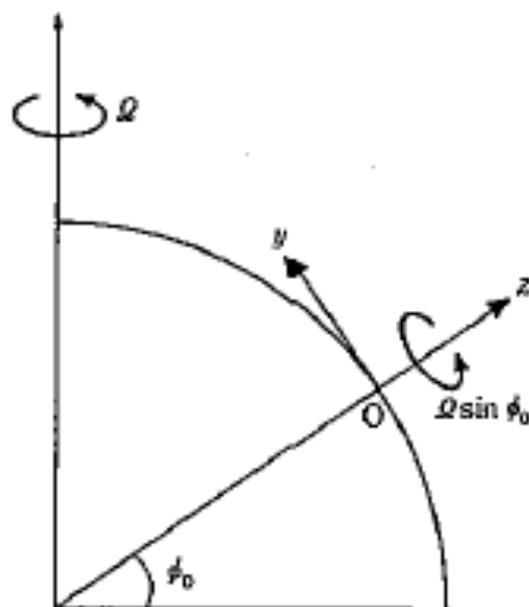


図9 局所直交座標系の図.

こうして以下本章で扱う流体は図 10 に示した通りで、運動にともない、海面が平均海面 (等重力ポテンシャル面) から、ずれた量を  $\eta(x, y, t)$  で表す. 一般に海底は平坦でなくてもよく、海底地形は  $z = -H(x, y)$  で表す. したがって流体層の厚さは  $h = H + \eta$  である<sup>\*12</sup>.

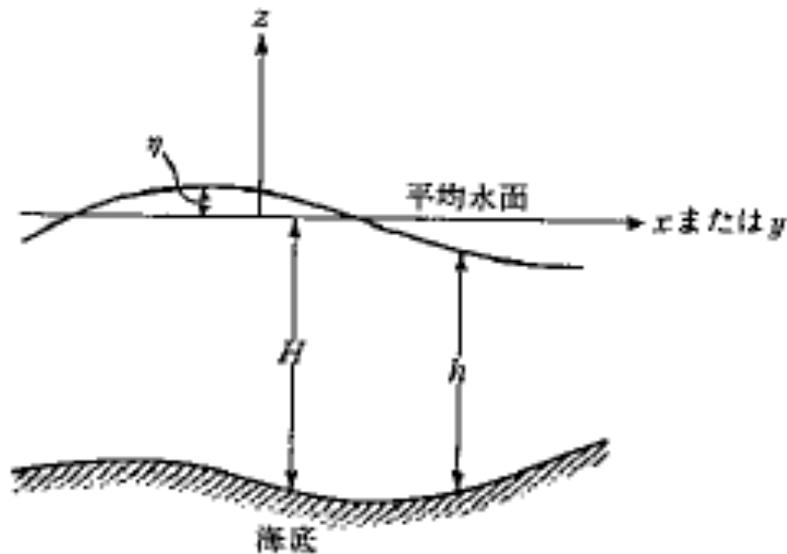


図 10 非圧縮流体層で設定した各パラメータを示した図.

この流体層の運動を記述するには、運動方程式 (2.8. 1) 式を、水平方向成分と鉛直方向成分にわけて書くと便利である. それでこれまで  $v$  は 3 次元の速度ベクトルを表してきたが、以下  $v$  は 2 次元の水平ベクトルを表すことにする. すなわち  $v = iu + jv$  である. 速度の鉛直成分は  $w$  で表す. また  $\nabla$  というオペレーターは  $\nabla = i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y)$  と定義する. さてベータ平面近似を用いて、かつ運動方程式 (2.8. 1) 式を  $x, y$  成分と  $z$  成分に分けると次のように書ける.

$$\frac{dv}{dt} + f\mathbf{k} \times v = -\nabla \cdot \left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2.8. 5)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial z} + g \quad (2.8. 6)$$

2.1 節で示したように、この章では考えているスケールの現象に対しては、地球の曲率による項  $\frac{v w \tan \phi}{a}$  と  $\frac{u^2 \tan \phi}{a}$  は (2.8. 5) 式に含まれていない. 以下この章では、鉛直方向の運動方

<sup>\*12</sup> ただし、現実の大気には自由表面は存在しない.

程式は, (2.8. 6) 式でなくて静力学平衡の式, すなわち

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.8. 7)$$

でおきかえる. 運動がなければ (2.8) 式は完全に成り立つ. ここでは運動が起こっていても,  $p$  と  $\rho$  はいつでも (2.8) 式の関係で結びついていると近似するわけである. いま静止している流体層を考えてみる. そのときの等圧面は水平である. 換言すれば, このときの圧力を  $p_0$  とすると,  $p_0$  は  $z$  の関数である. これに運動とともに振幅の小さい擾乱  $p_1(x, y, z, t)$  が加わったとする. このときの全圧力は  $p_0(z) + p_1$  であり, 等圧面はもはや水平ではなく, しかも水平傾度  $\nabla p$  は  $\nabla p_1$  に等しい. すなわちすべての水平運動に有効な圧力傾度力は, この運動にともなう  $p_1$  の水平傾度によるものである. したがって, 静力学平衡にある圧力からのずれの傾度 ( $\nabla p_1$ ) を  $\frac{dv}{dt}$  と比較しなければならない. このずれ  $p_1$  の大きさは次のように見積もることができる. (2.8. 6) 式を  $-H$  から  $\eta$  まで  $z$  について積分すると,

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z} dz \sim H \left| \frac{dw}{dt} \right| \quad (2.8. 8)$$

である.  $H$  は海の深さ, あるいは運動の鉛直方向のスケールとみてよい. したがって  $p_1$  にともなう水平傾度力の大きさは  $\nabla \left( \frac{Hdw}{dt} \right)$  の程度である. 水平方向の長さのスケールを  $L$ , 速度のスケールを  $U$  とすると, 質量保存則 (2.8. 1) 式により,

$$w \sim H \nabla \cdot \mathbf{v} \sim \frac{HU}{L} \quad (2.8. 9)$$

したがって,

$$\left| \nabla \left( \frac{Hdw}{dt} \right) \right| \sim \left| \nabla \left( \frac{H^2}{L} \frac{dv}{dt} \right) \right| \sim \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left| \frac{dv}{dt} \right| \quad (2.8. 10)$$

この結果によれば,  $H \ll L$  の場合には, 静力学平衡からのずれの圧力は, 水平方向の運動にはほとんど寄与しない. したがって運動の鉛直スケールが水平スケールより, はるかに小さい場合には, 静力学平衡を仮定していいといえる<sup>\*13</sup>. この章では, すべてこの場合である.

<sup>\*13</sup> なお, 液体が回転している場合には,  $H$  が  $L$  と同じ程度であっても, 静力学平衡が成り立つ場合がある. このことは大気や海洋の大循環を模型実験で再現しようとするとき重要な意味をもつ. つまり現実の大循環では  $L \sim 10^3$  から  $10^4$  km,  $H \sim 4$  km (海洋) か  $10$  km (大気) の程度である. これと同じ桁の  $H/L$  をもつ模型をつくることは実際上困難だからである.  $H \sim L$  であっても, 速く回転している流体では静力学的平衡が成り立つ理由は, このような流体中の  $w$  は (2.8. 9) 式で見積もったものより, ずっと小さいからである.

こうして密度が一様な 1 層流体の運動を記述する方程式系は, (2.8. 1) 式, (2.8. 5) 式, (2.8) 式から成る. この方程式系を数学的に取り扱いやすい形に変形しておこう. まず  $\rho = \text{一定}$  の仮定の下に, 式を  $z$  について,  $z$  から  $\eta$  まで積分すると, 深さ  $z$  における  $p$  は,

$$p = p_\eta + \rho g(\eta - z) \quad (2.8. 11)$$

で与えられる.  $p_\eta$  は海面  $z = \eta$  における圧力である. 現実の海洋の場合には,  $p_\eta$  は海面における気圧に相当する. ここでは, いつも  $p_\eta = \text{一定} = 0$  ととる. すなわち,

$$p = \rho g(\eta - z) \quad (2.8. 12)$$

である. (2.8. 12) 式を (2.8. 5) 式に代入すると,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -g\nabla\eta \quad (2.8. 13)$$

この式の右辺は  $z$  によらない. したがって,  $\mathbf{v}$  も  $z$  にはよらないことになる. これは重要な結果の一つである. また, この性質を利用して, 質量保存式  $\nabla \cdot \mathbf{v} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$  を  $z = -H$  から  $z = \eta$  まで積分すると,

$$h\nabla \cdot \mathbf{v} + w|_{z=\eta} - w|_{z=-H} = 0 \quad (2.8. 14)$$

が得られる.  $w|_{z=\eta}$  は自由表面  $\eta$  が時間と共に変わる割合であるから,

$$w|_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\eta \quad (2.8. 15)$$

である. また本章では摩擦の影響を考えていないので,  $w|_{z=-H}$  は海底面上の海水粒子が海底地形に沿って運動することによって起こる. したがって,

$$w|_{z=-H} = \frac{d(-H)}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla H \quad (2.8. 16)$$

である. (2.8. 15) 式と (2.8. 16) 式を (2.8. 14) 式に代入すると,

$$h\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\eta + \mathbf{v} \cdot \nabla H = 0 \quad (2.8. 17)$$

すなわち,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = 0 \quad (2.8. 18)$$

となる. こうして, (2.8. 13) 式と (2.8. 17) 式から成る方程式系 2 つの従属変数  $\mathbf{v}$  と  $\eta$  が決められる.  $\eta$  がわかれば (2.8. 12) 式によって  $p$  が決まる.

## 2.9 浅水方程式の線形化

前節で導いた方程式系 (2.8. 13) 式と (2.8. 17) 式は, ベータ平面上で密度一様な流体層の運動を記述する完全な方程式系である. しかし, この方程式系は非線形なので, 線形化して物理的な意味をよく理解するために微小振動の方法を仮定する.

この微小振動の方法では, 全ての従属変数を 2 つの部分に分ける. 1 つの部分は基本状態といわれるもので, 普通時間に無関係で, 空間座標だけの既知の関数にとる. もう 1 つの部分が擾乱の基本状態からのずれを表す. 例えば  $\bar{u}$  を基本状態における  $x$  方向の (一定の) 速度とすると,  $x$  方向の速度は  $u(x, y, z) = \bar{u} + u'(x, y, z, t)$  と表すわけである. このとき, 例えば慣性項  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  は,

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} \\ &= \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.9. 1)$$

となる. 微小振動の方法を用いるときの仮定としては, 擾乱が 0 のときには, 基本状態そのものも, もとの方程式系を満足しなければならない. さらに擾乱の振幅は無限に小さく, その積は全て省略できるものとする. すなわち上の例でいえば,  $|u' \bar{u}| \ll 1$  であり,  $|\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}| \gg |u' \frac{\partial u'}{\partial x}|$  と仮定する. したがって, (2.8. 13) 式と (2.8. 18) 式に対する微小振動の方程式は,  $H = \text{const}$  のとき,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.9. 2)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.9. 3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} + H \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.9. 4)$$

となる. ここでは, 基本場  $\bar{u}$  は  $z$  方向には変化しないものとする. さらに, 有限な領域を考

えているので基本場は  $\bar{u} = 0$  となる. これを考慮して, 上の式を書き換えると,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.9.5)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f u' = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.9.6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.9.7)$$

となる. こうして, 1 層の浅水方程式が導出された.

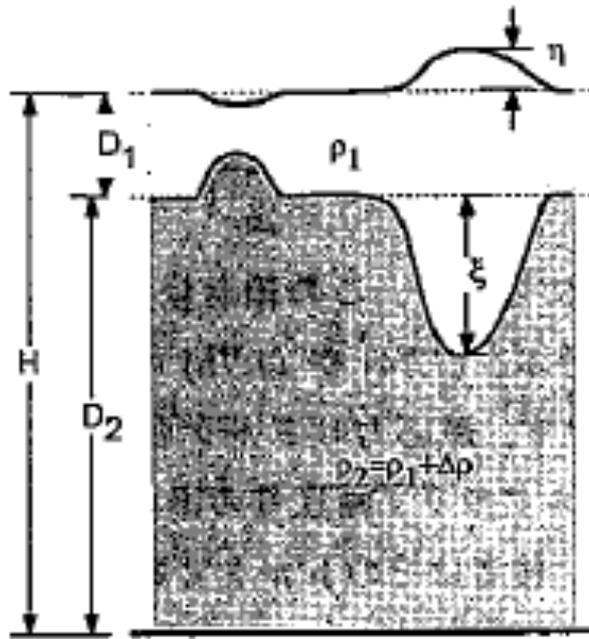


図 11 2 層流体を表した図. 上層と下層の厚さを  $D_1, D_2 (> 0)$  とし,  $H = D_1 + D_2$  とする. また, 上端面の変位  $\eta$  と境界面の変位  $\xi$  は, 鉛直上向きを正とする.

次に, 2 層モデルを考えよう. ここで考えるのは高密度の下層の上に低密度な上層が乗った安定 2 層流体である. 図 11 のような 2 層流体を考える. 上層では, 運動方程式と連続の式である (2.9.5)~(2.9.7) 式はほとんど変わらない. 以下, パラメータの下の添え字は 1 が上

層, 2 が下層のものであることを意味するものとする, 上層の運動方程式と連続の式は,

$$\frac{\partial u'_1}{\partial t} - f v'_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.9.8)$$

$$\frac{\partial v'_1}{\partial t} - f u'_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.9.9)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{D_1} \frac{\partial}{\partial t} (\eta - \xi) \quad (2.9.10)$$

となる. (2.9.5)~(2.9.7) 式との違いは (2.9.10) 式の右辺で, 上層の厚さ  $h_1 = D_1 + \eta - \xi (\simeq D_1)$  の変動は, 上端  $\eta$  と下端  $\xi$  両方の変動から生じている.

次は, 下層について議論していく. 下層の密度  $\rho_2$  は  $\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho$  で表すことが出来るものとする. 下層の圧力は上層の厚さに依存して,

$$p_2 = \rho_1 g (D_1 + \eta - \xi) - \rho_2 g (z - D_1 - \xi)$$

となるから下層の運動方程式と連続の式は,

$$\frac{\partial u'_2}{\partial t} - f v'_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} = -g^* \frac{\partial \xi}{\partial x} - g \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.9.11)$$

$$\frac{\partial v'_2}{\partial t} - f u'_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y} = -g^* \frac{\partial \xi}{\partial y} - g \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.9.12)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x} + \frac{\partial v'_2}{\partial y} = -\frac{1}{D_2} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.9.13)$$

となる. ただし, 下層の厚さ  $h_2 = D_2 + \xi$  は  $D_2$  で近似できるとした. また,  $g^* \equiv g \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} = g \frac{\Delta\rho}{\rho_2}$  は, 還元重力または有効重力と呼ばれており, 一般に  $\Delta\rho \ll \rho_1, \rho_2$  なので,  $g$  よりも圧倒的に小さくなる.

さて, 上層と下層の運動方程式を見比べてみよう.  $\Delta\rho \ll \rho_2$  から  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \simeq 1$  がいえるので, 上層と下層の運動の違いは主に, (2.9.12), (2.9.13) 式の右辺第1項の  $\xi$  に依存していると考えられる.

ところで,  $\xi$  と  $\eta$  の間に  $\xi = -\eta \frac{\rho_1 g}{\rho_2 g^*}$  の関係がある場合には (2.9.10), (2.9.11) 式の右辺は 0 になる. このときは, 上端の  $\eta$  によって生じる圧力変動が, 境界面の変動  $\xi$  によって打ち消されている. このような状態をアイソスタシーと呼ぶ.

### 3 木星大赤斑について

#### 3.1 Dowling and Ingersoll 1989 基本方程式

この論文では木星大赤斑を表現する数値計算モデルを考えている。実際の大赤斑をより正確に表現するためには、多層モデルを考えなければならないが、その前段階として2層モデルの下層の動きを固定して1層モデルに近似したモデルである1.5層モデルを考える。ここで考える1.5層モデルは、鉛直方向の物理量が無視できるくらいに鉛直方向の厚さが薄く、渦を含んでいる上層と、対流調節された中立成層でとても厚い下層で構成される。さらに、下層の性質として、下層は上層に比べて十分に厚いので、下層の運動は上層の力学から影響を受けず、そして、下層の運動は東西方向一様で定常である、というようなものが仮定されている。

ここでは数値計算をするにあたり、回転楕円座標系における非線形浅水方程式系を使用することにした。具体的な方程式系は以下の通りである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\zeta + f)v = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} [g(h + h_2) + K] \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\zeta + f)u = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} [g(h + h_2) + K] \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (hv) = 0 \quad (3.1.3)$$

ここで、東西方向の速さを  $u$ 、南北方向の速さを  $v$ 、相対渦度を  $\zeta \equiv \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$ 、コリオリパラメータを  $f \equiv 2\Omega \sin \phi$  ( $\Omega$  は惑星の自転角速度)、経度を  $\lambda$ 、緯度を  $\phi$ 、 $h_2$  を底の地形<sup>\*14</sup>、 $\phi, \lambda$  方向のスケールファクターをそれぞれ  $r, R$ 、運動エネルギーを  $K = \frac{1}{2}(v^2 + u^2)$  とした。さて、(3.1.1) 式、(3.1.2) 式の重力のパラメータ  $g$  は1.5層モデルでは次のように表される。

$$g = g_J \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right) \quad (3.1.4)$$

パラメータの説明だが、 $g_J$  は木星雲頂における実際の重力、 $\rho_1, \rho_2$  はそれぞれ上層の密度、下層の密度である。 $g_J$  はこの論文では、定常であると仮定する。ここで、スケールファ

\*14 底の地形？

クターについては、極半径を  $R_p$ , 赤道半径を  $R_e$ ,  $\epsilon \equiv \frac{R_e}{R_p}$  と定義して、以下のように表現できる。

$$r(\phi) = \frac{R_e}{(1 + \epsilon^{-2} \tan^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.1.5)$$

$$R(\phi) = \frac{R_e}{\epsilon^2} \left( \frac{r}{R_e \cos \phi} \right)^3 \quad (3.1.6)$$

木星では、赤道半径と極半径はそれぞれ  $R_e = 71400$  km,  $R_p = 66773$  km である。下層の東西方向の定常な速度を  $u_2(\phi)$  とすると、底の地形  $h_2(\phi)$  は以下のように表される。

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} g h_2 = - \left( f + \frac{u_2}{r} \sin \phi \right) u_2 \quad (3.1.7)$$

底の地形と下層の流れは、rimaie1986 によって決定された東西方向一様な雲頂の速度分布を使うことにより仮定される。

多くの数値実験では強制項というものを基本方程式に付け加え、実験が都合よく進むように調整する。今回は、(3.1.1) 式右辺に以下のような項を付け加えた。

$$- \text{frac}1\tau(u - u_J(\lambda)) \quad (3.1.8)$$

## 3.2 計算結果

ここに、計算結果を載せる。D.I.1989 で  $\tau = 400$  day に設定したときの結果が以下の図である。この場合、東西方向の速度分布は実際のも的一致し、いくつかの小さな渦が合体し持続する大きな渦が現れた。速度分布に関しては、実際に観測されたものと見比べていただきたい。

## 4 まとめ

第2章で回転地球上の運動方程式を出発地点に、線形化された2層の浅水方程式系を導出した。

D.I.1989 では大赤斑の数値計算モデルを表現する基本方程式に回転楕円座標系における浅水方程式を使用している。木星はガス惑星であり、自転により極半径より赤道半径の方が大きい回転楕円体をしているので、D.I.1989 における基本方程式の設定は、非常に合理的である。浅水方程式は、水平スケールに比べ鉛直スケールが非常に小さい薄膜のような

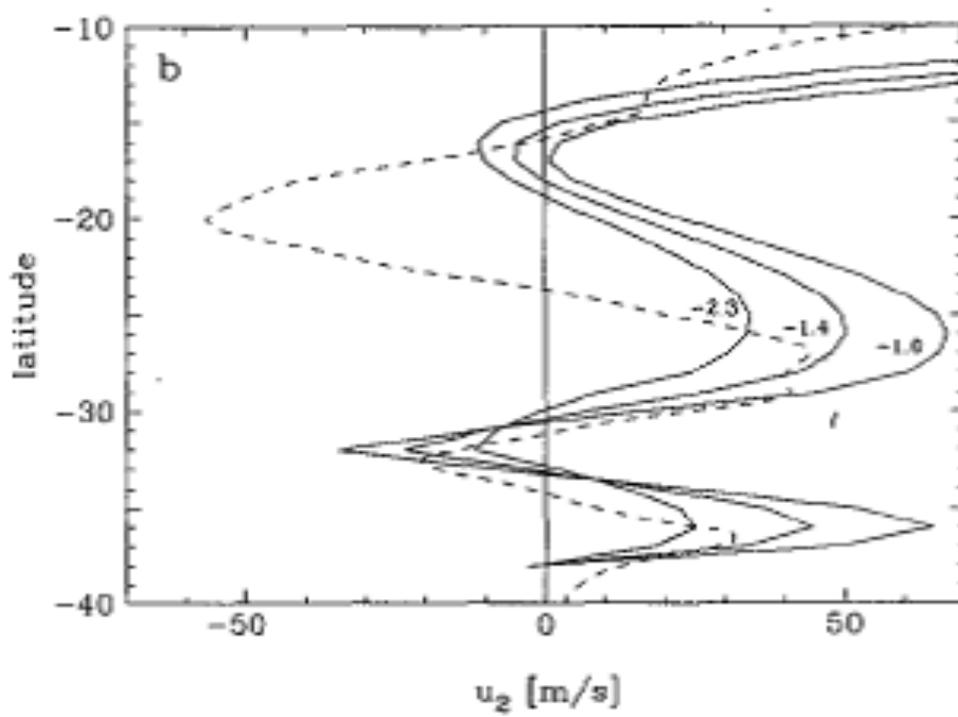


図 12 木星における実際の速度分布を示す図．縦軸に緯度, 横軸に東西方向の速度分布をとる．破線が観測された実際の速度分布である．

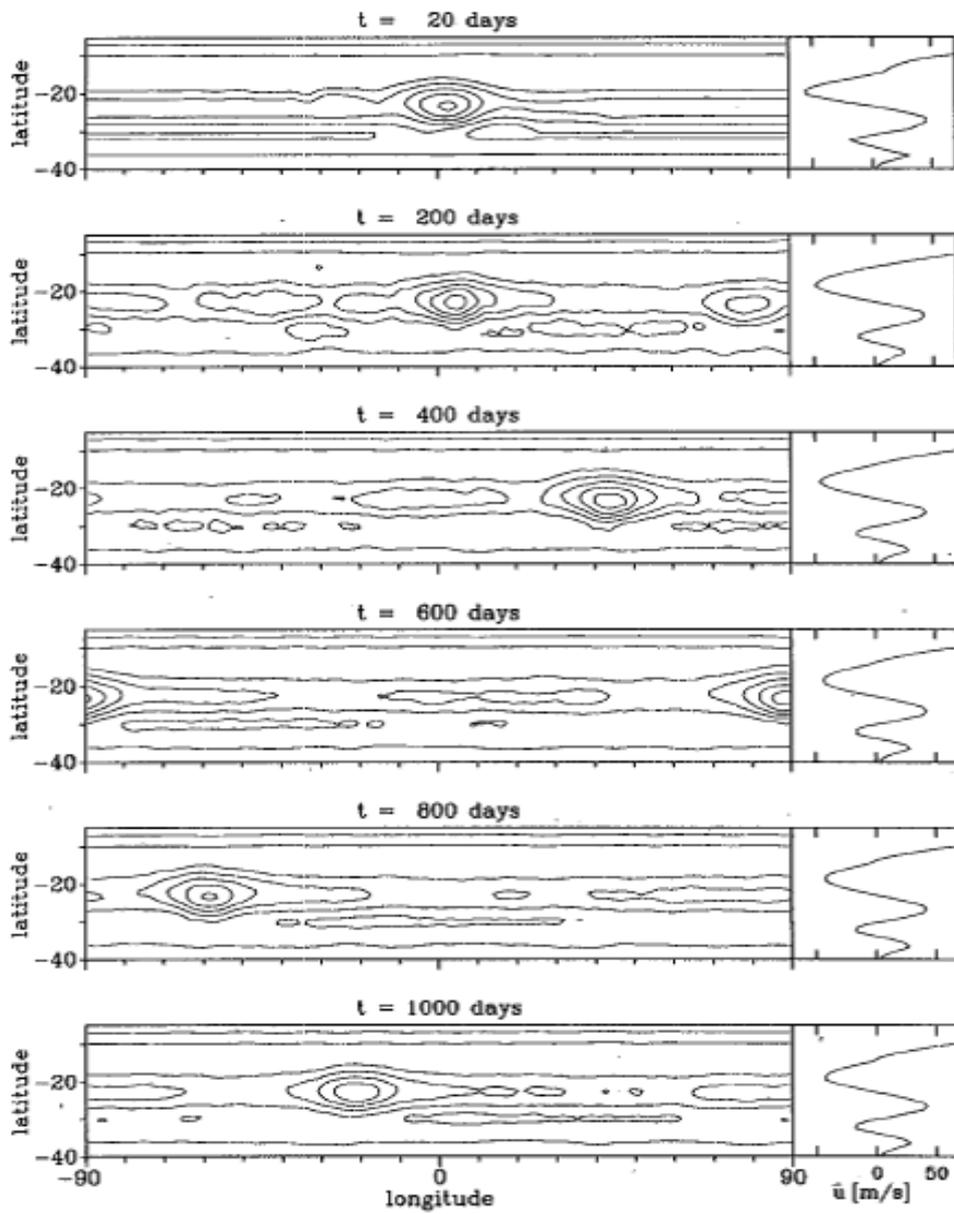


図 13 D.I.1989 の計算結果の図. 縦軸を緯度横軸を経度とし, 左の図は自由表面の高さ  $g(h+h_2)$  を示している. 右の図は速度分布を示している.

流体を表現する運動方程式である。D.I.1989 では木星大気を非常に薄い上層と厚い下層で構成され、大赤斑は上層に存在しているものと仮定し、数値計算を行っている。そして、D.I.1989 について、私なりの考察を記す。何度も述べるようだが、多くの大赤斑の数値計算には浅水方程式を使っている。この浅水方程式だが、近似を使いすぎな気がする。実際の大赤斑は、1.5 層モデルでは表すことなどは出来ない。なぜなら、近似したり無視してきた物理量は、実際はどのように大赤斑に影響しているかわからないからである。そこで大赤斑研究における今後の課題は、より複雑なモデルを使つての数値計算ではないか、と思う。

## A 付録

回転楕円座標系の浅水方程式

さて、本節では前節で導出した浅水方程式を、回転楕円座標系に適用する。

まず、スケールファクターについて考える。そのために、図 14 に示した任意の点  $A$  のまわ

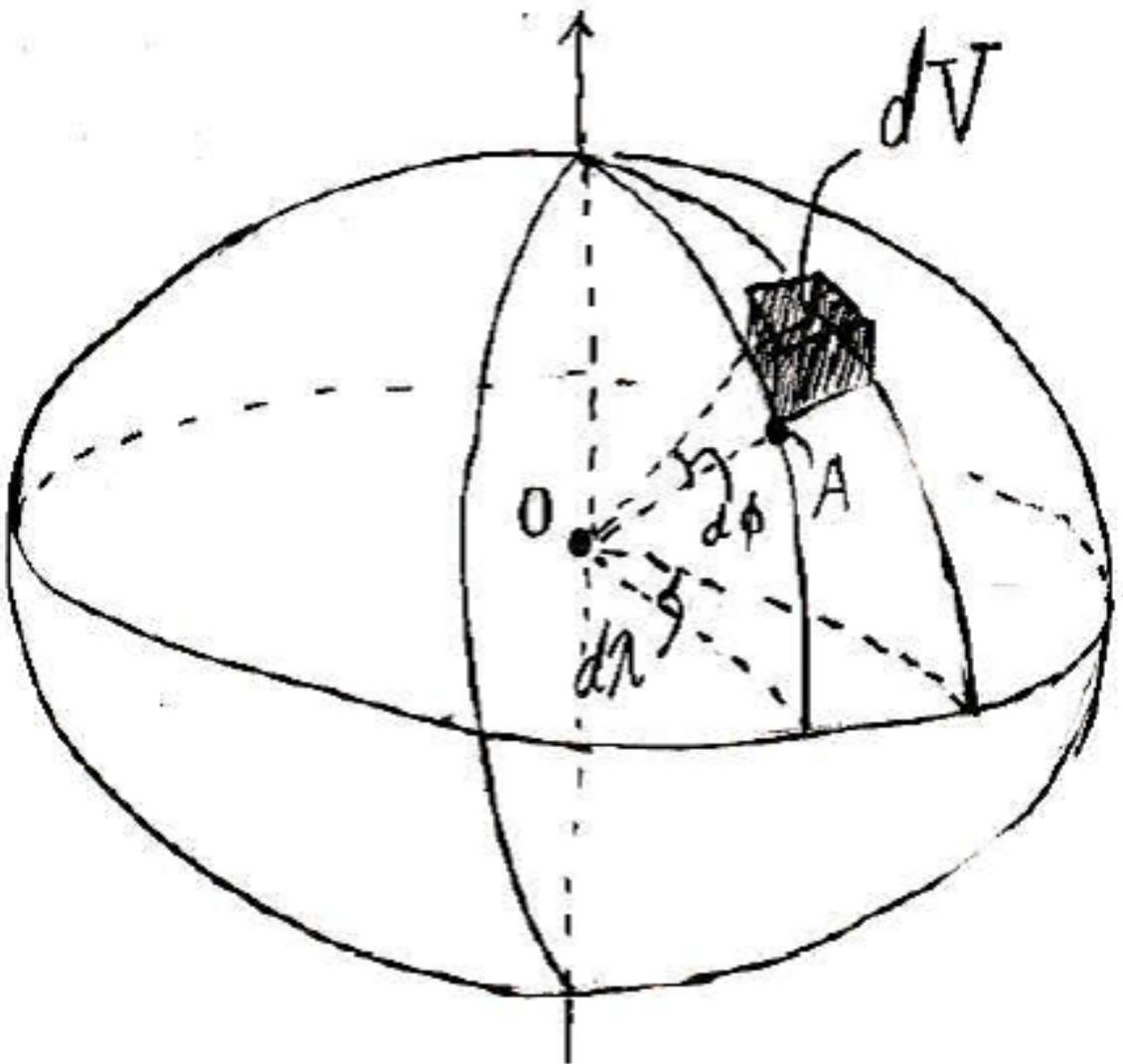


図 14 この図は回転楕円座標系における任意の点  $A$  の周りの微小体積要素を表す図である。

りの微小体積要素  $dV$  について考えていく.

最初に,  $\lambda$  の微小変化量  $d\lambda$  が  $dV$  に寄与する部分  $p d\lambda$  (参照) について考える.

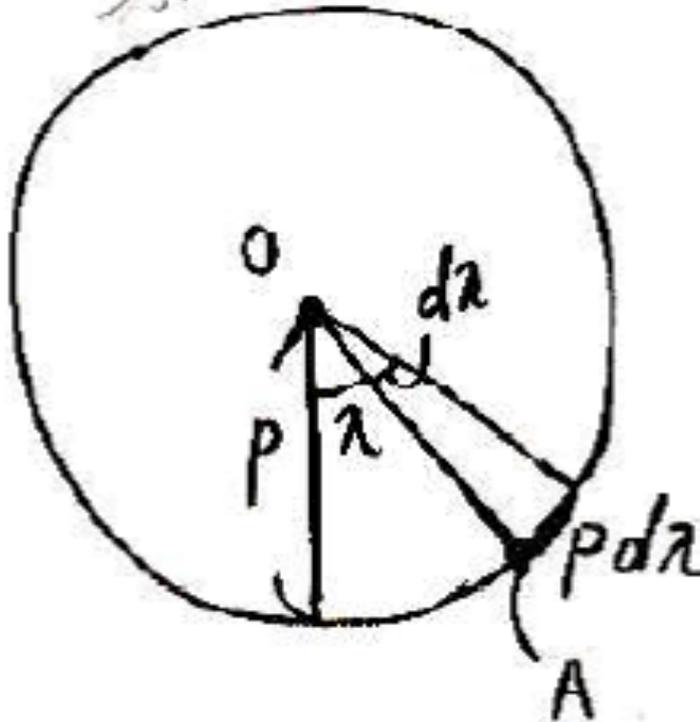


図 15 図 14 の点 A で横から垂直に切り口を入れ, その断面を上から見た図である.

$d\lambda$  のスケールファクターは  $p$  なので, これから  $p$  を求める. 図 16 より,

$$\begin{cases} p = L \cos \phi \\ q = L \sin \phi \end{cases}$$

これを, 楕円の式  $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$  に代入して,

$$\frac{L^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{L^2 \sin^2 \phi}{b^2} = 1$$

$$L^2 \left( \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2} \right) = 1$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}}}$$

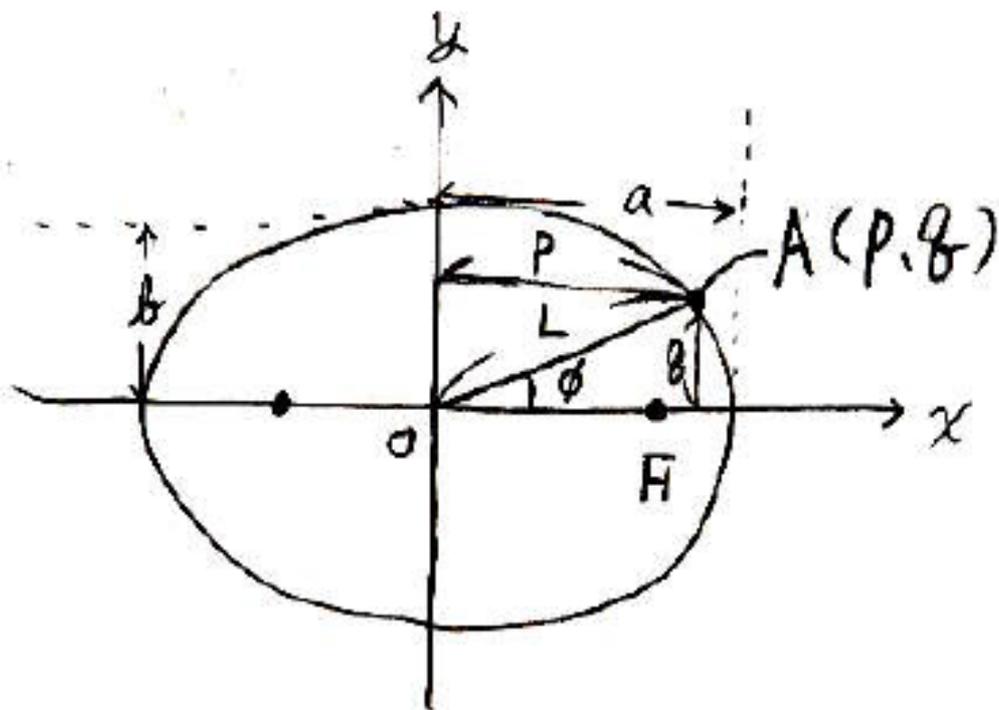


図 16 図 14 の点  $A$  で縦に垂直に切り口を入れ、その断面を横から見た図である。このとき、 $x$  軸、 $y$  軸を設定し、点  $A(p, q)$  とした。さらに、線分  $OA$  の長さを  $L$ 、焦点を  $F$  とした。

$p = \cos \phi$  より,

$$\begin{aligned}
 p &= L \cos \phi \\
 &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \tan^2 \phi}} \\
 &= \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \tan^2 \phi}}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

次に,  $d\phi$  が  $dV$  に寄与する部分 (図 17 参照) について考える. このとき, 太線部分の長さを  $X$  と置く.  $d\phi$  は微小量なので  $X$  は直線とみなすことができる. そこで, 図 18 に示す三角形を使って  $X$  を求めていく.

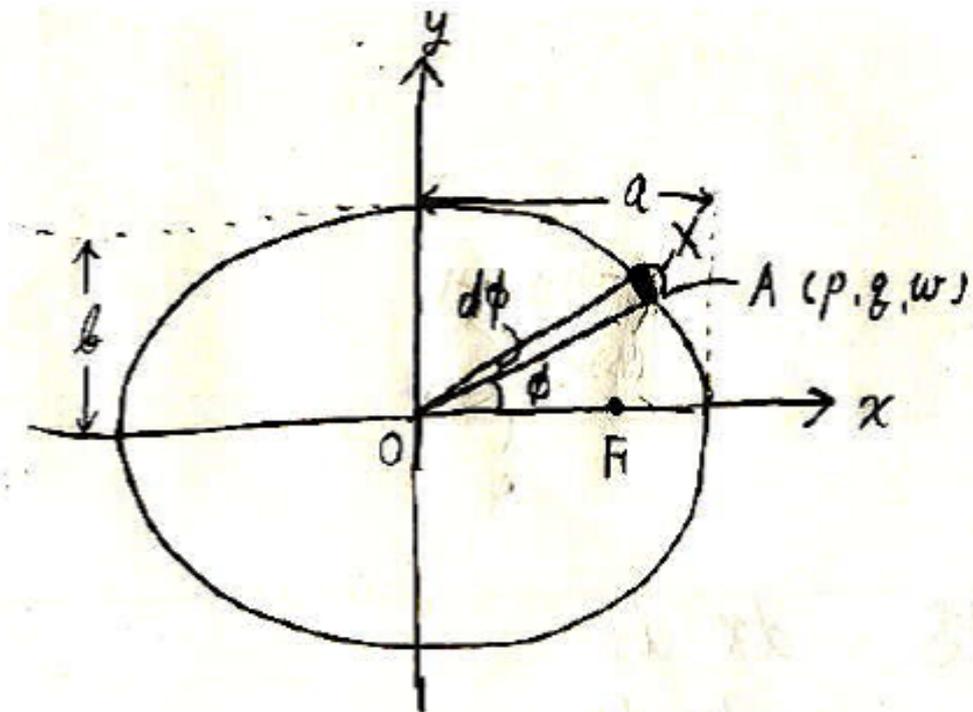


図 17 図 16 と同じ視点で見た図.  $d\phi$  の寄与による微小長さを  $X$  とした.

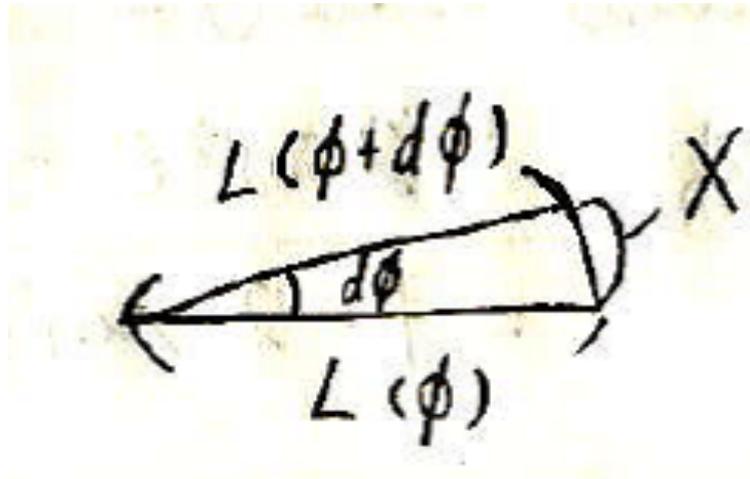


図 18 図 17 の線分  $X$  と原点  $O$  で作られる三角形に注目した図. 下辺を  $L(\phi)$  上辺を  $L(\phi + d\phi)$  と設定した.

$L(\phi)$  を  $\phi$  で微分したものを  $L'(\phi)$  とする. テイラー展開を使って,  $L(\phi + d\phi)$  は,

$$L(\phi + d\phi) = L(\phi) + L'(\phi)d\phi \quad (\text{A.2})$$

と表される.  $L'(\phi)$  を計算して,

$$L'(\phi) = \left(\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sin \phi \cos \phi \quad (\text{A.3})$$

ここで,  $X$  は余弦定理より,

$$\begin{aligned} X^2 &= L^2(\phi) + L^2(\phi + d\phi) - 2L(\phi)L(\phi + d\phi) \cos(d\phi) \\ &= 2(1 - \cos \phi)L^2 + L'^2(d\phi)^2 + 2(1 - \cos \phi)LL'(d\phi) \quad (\text{A.2}) \text{ を代入し, } L(\phi) \text{ を } L \text{ とした.} \\ &= 2(1 - \cos \phi) \left(\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}\right)^{-1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(1 - \cos \phi) \left(\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}\right)^{-2} \sin \phi \cos \phi d\phi \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となったが, この  $X$  に関しては最後まで導出することが出来なかったため, 結果のみ載せておく.

$$X = \frac{R_e}{\epsilon^2} \left(\frac{r}{R_e \cos \phi}\right)^3 \quad (\text{A.5})$$

$X$  と浅水方程式系本体を導き出すことが今後の課題である.

## 謝辞

本論文を作成するにあたり指導教官である惑星物理学研究室の石渡正樹准教授, 小高正嗣助教には的確でわかりやすく熱心なご指導をして頂きました。私のような流体力学初心者を快く受け入れて下さり, 私が理解できるまで粘り強く教えて下さった事, 深く感謝しております。

また, 山下達也氏にはお忙しい中, 度々貴重な時間を割いて頂き, 流体力学, TeX の操作における指導, 論文の校正等をして頂きました。その他にも本論文の校正, 論文作成における指導等をして頂いた惑星物理学研究室の徳永義也氏をはじめとして多くの方々に助言や励ましのお言葉を頂きました。御協力いただいた皆様に心より感謝申し上げます。

## 参考文献

Dowling, T. E., and A. P. Ingersoll (1989), Jupiter's Great Red Spot as a Shallow Water System, *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3256-3278.

Limaye, S. S., (1986), New estimates of the mean zonal flow at the cloud level. *Icarus*, **65**, 335-352.

著：矢野 順一 (1993), 木星の大赤斑, 気象研究ノート第179号「気象とソリトン・モドン-気象現象中の孤立波(下)」, 東京大学出版会

著：松田 佳久 (2000), 惑星気象学, 東京大学出版会

著：九州大学大学院総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻 (2001), 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店