

スリングショットモデルによる  
ホットジュピターの形成  
Formation of hot jupiters  
by slingshot model

岡澤 直也

Naoya Okazawa

学生番号 22070283

北海道大学 理学部 地球科学科

惑星宇宙グループ

Department of Earth Sciences, Undergraduate school of Science,

Hokkaido University

Planetary and Space Group

指導教員 倉本圭教授

2011年4月18日

## 要旨

系外惑星が発見されるまで、太陽系惑星形成論は惑星系一般に通ずるものであると考えられてきた。しかし、発見された系外惑星は太陽系のものとは異なる特徴を持っており、これまでの惑星形成論では説明できない部分が多々ある。これまでいくつかの形成モデルが提案されてきたが、未だ説明できていない部分もある。

ホットジュピターの形成モデルである「スリングショットモデル」は、はじめに太陽系惑星形成モデルと同様に巨大惑星は形成されることを仮定している。その後、惑星間の重力相互作用によって近点距離の小さな楕円軌道を持つ惑星へと軌道進化する。さらに中心星の潮汐作用を考えることによってホットジュピターへの軌道進化を説明できる。スリングショットモデルは系外惑星の観測と調和的な点がみられるため、有力なモデルであると考えられている。

惑星間の重力相互作用による惑星軌道進化の数値シミュレーションを行ったところ、複数の巨大惑星を持つ系において軌道長半径が小さい楕円軌道を持つ惑星が得られることは確認できた。しかし、得られた惑星の近点距離の小ささは十分ではなく、中心星の潮汐作用が効かないという結果になった。より詳細な計算が必要ではあるが、スリングショットモデルで想定している軌道進化をする確率は必ずしも高くはないといえる。また、式を用いることによって、中心星の潮汐作用によって、近点距離の小さな惑星は軌道長半径と離心率小さくする軌道進化をすることも示すことができる。

中心星との潮汐相互作用は、ホットジュピターになった後の軌道も変化させる。中心星の共回転半径よりも内側の惑星は中心星へと落下してしまい、その存在を維持できない。共回転半径は中心星の年齢が高いほど大きくなると考えられているため、年齢の高い恒星はホットジュピターを保持しにくいという仮説が立てられる。また、現在までに発見されている系外惑星の観測データを用いて、中心星の年齢と惑星の軌道長半径の関係を見ると、年齢の高い星の周りには軌道長半径の短い惑星がほとんど見つかっていないことがわかる。このことは上記の仮説と整合的である。

## 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
1.1	背景	1
1.2	目的	2
1.3	構成	2
<b>2</b>	<b>系外惑星の特徴</b>	<b>3</b>
2.1	系外惑星の観測	3
2.2	系外惑星の特徴	3
2.3	エキセントリックプラネットとホットジュピターの形成過程	5
<b>3</b>	<b>スリングショットモデル</b>	<b>6</b>
3.1	重力相互作用の効果	6
3.2	中心星の潮汐効果による円軌道化	7
<b>4</b>	<b>重力相互作用のシミュレーション</b>	<b>8</b>
4.1	基礎方程式	8
4.2	数値計算法	9
4.2.1	オイラー法	9
4.2.2	ルンゲクッタ法	9
4.2.3	エルミート法	9
4.3	設定	10
4.4	シミュレーション結果	11
<b>5</b>	<b>中心星の自転速度と惑星の関係</b>	<b>14</b>
5.1	中心星が変形する潮汐効果による惑星の落下	14
5.2	惑星の軌道変化に伴う中心星の自転速度の変化	15
5.3	恒星風による恒星の自転速度の変化	17
5.4	中心星の年齢と惑星の軌道長半径	17
<b>6</b>	<b>まとめ</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>APPENDIX</b>	<b>21</b>
7.1	ヒル半径	21
7.2	楕円の式	22
7.3	軌道エネルギーと角運動量	22
7.3.1	中心星を原点とした場合	22
7.3.2	重心を原点とした場合	24
7.4	打ち切り誤差	25
7.4.1	4次のルンゲクッタの精度の証明	26
7.5	多項式補間	27
7.5.1	加速度の高度展開係数	27

# 1 はじめに

## 1.1 背景

1990年代まで惑星形成論は太陽系の惑星を対象にしてきた。太陽系の形成過程を説明することができる優れた太陽系惑星の形成論として標準モデル (Hayashi et al. 1985) が知られている。

標準モデルでは惑星系形成過程は次のように考えられている。惑星は中心星の周りを取り囲む原始惑星系円盤において形成される。原始惑星系円盤中の固体成分から微惑星が形成され、それが衝突合体していき惑星となる。その一連の過程において円盤の外側領域ほど中心星からの距離が遠いため円盤温度が低い。氷が気化せず固体として存在できる領域では固体成分が多くなり、惑星も大きく成長することができる。そして惑星質量が10地球質量程度まで大きくなると周囲の円盤ガスを取り込み、自らの質量が急増するガス捕獲段階へと入る。ただしこの時にすでに原始惑星系円盤が散逸していた場合はガスを取り込むことができず巨大氷惑星となる。ガス捕獲段階は原始惑星系円盤が散逸するか、惑星が原始惑星系円盤にギャップを形成するまで続き、最終的に巨大ガス惑星が形成される。つまりこのモデルでは円盤の温度が低い領域に巨大ガス惑星が形成されると考えられており、太陽系の各惑星の配置を上手く説明する。

しかし、1995年の最初の系外惑星の発見を機に惑星形成論は大きな見直しを求められるようになった。最初に発見された系外惑星である51 Peg bは質量が木星の半分程度であるのに対し、軌道長半径が0.052AUであるという太陽系の形成モデルでは説明できないような特徴を持つ (Marcy et al. 1997)。そして2011年1月現在で518個 (Schneider 2011)の系外惑星が発見されているが、木星に近い質量でありながら中心星に非常に近い軌道を持つ惑星は珍しくないということがわかってきている。これらの惑星はホットジュピターと総称されている (e. g. Schilling 1996)。

現在ホットジュピターの形成過程にはいくつかのモデルが考えられており、「スリングショットモデル」はその1つである。「スリングショットモデル」とは、3つ以上の巨大惑星が互いの重力相互作用によって軌道を乱して、その結果、近点が中心星に近い楕円軌道の惑星がつくられ、そしてその軌道が中心星の潮汐作用によって長半径を小さくしながら円軌道化しホットジュピターが形成されるというモデルである。このような初期条件は惑星形成過程において比較的实现しやすいものであり、またそのシナリオが系外惑星の観測的事実と整合的な側面をもつという点から、このモデルはホットジュピター形成モデルの中でも有力視されている (Nagasawa et al. 2008)。

## 1.2 目的

本論文では、巨大惑星同士の重力相互作用と中心星の潮汐効果の2つの段階に分けて、この「スリングショットモデル」を理解する。特に惑星間の重力相互作用による軌道変化については自ら数値シミュレーションを行うことで軌道の進化の過程を具体的に理解する。また、観測データを用いて、ホットジュピターの存在と中心星の年齢との相関を示す。

## 1.3 構成

本論文では、まず2章で観測された系外惑星の特徴とその形成過程のモデルについて簡略に述べる。3章でホットジュピター形成モデルのスリングショットモデルについて解説する。4章では惑星間の重力相互作用による軌道変化のシミュレーションについて計算法を交えながら記述し、結果を考察する。続く5章では中心星の年齢と惑星の関係について考察する。6章で本論文のまとめを記述する。最後に本論文中で用いた式の導出を7章に掲載する。

## 2 系外惑星の特徴

### 2.1 系外惑星の観測

系外惑星は恒星のように自ら光を放っていないため直接検出しにくく、主に間接検出によって発見されている。これまで最も多くの系外惑星を検出している手法はドップラーシフト法である。これは惑星を持つ恒星が、惑星の重力の働きによって共通重心の周りを運動する様子を、恒星スペクトルのドップラー偏移から検出するものである。この手法では惑星質量が大きく、公転周期の短いものほどより観測しやすい。この他にトランジット法によっても多くの系外惑星が確認されており、この手法では惑星が恒星と地球の間を通過する際の恒星のみかけの明るさの変化から惑星を検出する。トランジット法には系外惑星の公転面が地球から見ればほぼ真横でない点と検出できない欠点があるが、惑星半径や軌道傾斜角などドップラーシフト法では得られない物理量を得ることができる利点がある。系外惑星の検出法としては、他にもアストロメトリ法や重力レンズ法などがあるが、現在まで発見された系外惑星のほとんどはドップラーシフト法とトランジット法によって発見されている。

### 2.2 系外惑星の特徴

次に系外惑星の特徴を太陽系惑星と比較をする。太陽系では太陽に近いものから順に岩石惑星が4つ、巨大ガス惑星が2つ、巨大氷惑星が2つ存在している。表1は太陽系惑星の各物理量を示した。太陽系の惑星はいずれも離心率が小さく、円軌道に近い軌道を持っていることがわかる。また、どの惑星の軌道傾斜角も小さいことから、太陽系惑星は太陽の周りに存在した原始惑星系円盤において形成されたと考えられている。

表 1: 太陽系惑星のデータ (National Space Science Data Center)

	質量 [ $m_{\oplus}$ ]	軌道長半径 [AU]	離心率	軌道傾斜角
水星	0.055	0.39	0.21	7.0
金星	0.82	0.72	0.007	3.39
地球	1.0	1.0	0.017	0.0
火星	0.11	1.52	0.09	1.85
木星	318	5.20	0.05	1.304
土星	95.2	9.58	0.05	2.485
天王星	19.2	19.2	0.05	0.772
海王星	17.1	30.0	0.01	1.769

図1, 図2に現在までに見つかっている系外惑星の軌道長半径と離心率, 軌道長半径と惑星質量の関係をそれぞれ示した. 太陽系惑星と比較すると系外惑星にはかなり大きな離心率を持つものが数多くみられ, 太陽系が必ずしも惑星系一般を代表している惑星系であるとは言えないことがわかる. このような離心率の大きな惑星はエキセントリックプラネットと呼ばれる.

また, 軌道長半径が0.1AU以下の惑星も多く存在することがわかる. もちろん先に述べたように現在の系外惑星観測は軌道周期の短いものが発見されやすいので, この観測結果には偏りがあると考えられるが, このような惑星が存在しているのもまた事実である. さらに図2より, この小さな軌道長半径を持つ惑星のかなりの割合が木星と同程度の質量を持つこともわかる. このような中心星の至近距離をまわっている木星質量程度の惑星をホットジュピターと呼ぶ.

さらに図1から, 軌道長半径の小さい( $a < 0.1$  AU) 惑星では離心率の高い惑星がほとんど見つかっていないのに対して, 軌道長半径が大きい惑星では離心率が広く分布していることがわかる. これは3章で述べるスリングショットモデルにおけるホットジュピター形成のシナリオと調和的である.

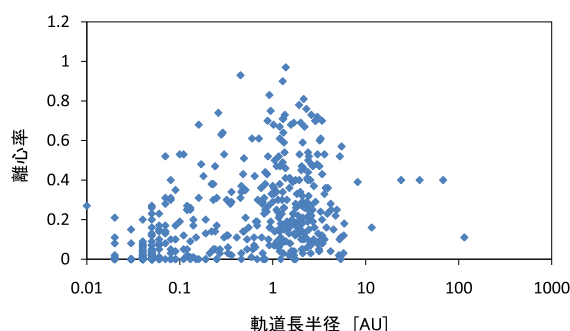


図1: 2011年2月時点までに明らかになっている, 481個の系外惑星の軌道長半径と離心率 (Schneider 2011 よりデータを引用)

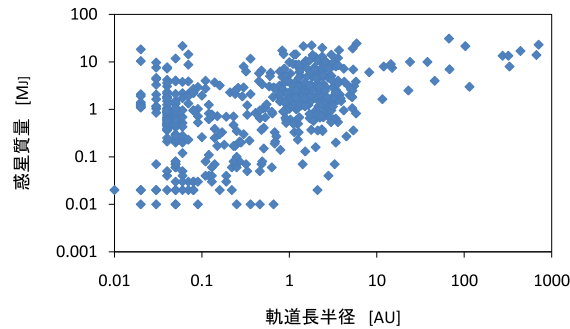


図 2: 2011 年 2 月時点までに明らかになっている, 514 個の系外惑星の軌道長半径と惑星質量 (Schneider 2011 よりデータを引用)

### 2.3 エクセントリックプラネットとホットジュピターの形成過程

エクセントリックプラネットのような離心率の大きな惑星の形成モデルとして「ジャンピングジュピターモデル」が提案されている (Weidenschilling & Marzari 1996). ジャンピングジュピターモデルでも最初に標準モデルと同様に円軌道の惑星が形成されることを仮定する. その後, 巨大惑星同士の重力相互作用によって惑星の軌道が乱れ, その結果, 離心率の大きな軌道を持つ惑星が形成されると考える.

ホットジュピターの形成モデルは大きく分けると, 元々は円盤の外側領域で惑星が形成されそれが中心星の近くへと移動したとする「惑星落下モデル」(Lin et al. 1996) および「スリングショットモデル」(Rasio & Ford 1996) と, はじめから中心星の近くで形成されたとする「その場形成モデル」(Bodenheimer et al. 2000) に分けられる.

惑星落下モデルでは, まず惑星が原始惑星系円盤にギャップを形成してそこに閉じ込められ, 円盤の粘性拡散に引きずられて内側へと移動していく. そして中心星の近傍で中心星の潮汐作用や, ヒル半径の縮小に伴う質量放出によって移動が停止すると考えられている. しかし, このシナリオでは太陽系惑星も同様の移動をしてしまう可能性があるが, そのような痕跡は残されていない. その場形成モデルはその名の通り中心星付近で惑星が形成されたというモデルである. 円盤質量が大きければ高温の円盤の内側領域でも十分な惑星材料物質を得ることができる. しかし, そのような領域では円盤にギャップが形成されたり, 温度が高いため固体物質が蒸発しやすいなどの問題がある (Lin et al. 1996). ホットジュピターの形成モデルとして最も有力視されているスリングショットモデルについては 3 章で詳細に述べる.



### 3 スリングショットモデル

ホットジュピターの形成モデルであるスリングショットモデルは大きく2つの過程からなっている。1つはジャンピングジュピターモデルと同様に複数の惑星の重力相互作用によって軌道が不安定化し、近点が中心星に近い楕円軌道の惑星をつくる過程である。もう1つは、楕円軌道が中心星の潮汐効果によって円軌道化し、軌道長半径も小さくなっていく過程である。重力摂動による軌道不安定では軌道長半径を元の値の半分程度までしか小さくすることができず、離心率も大きな値となってしまうためその過程のみでホットジュピターを形成することは難しい。しかし、近点距離が小さくなると中心星の潮汐効果を強く受けることになる。

このモデルでは初期条件として巨大惑星が複数個存在する必要があるが、太陽系に巨大惑星が4つ存在するように、一般の惑星系形成でもこの条件が満たされる可能性は高いと考えられる。また、先に述べたように軌道長半径の小さい惑星の離心率が低いという観測事実とも整合的であるため、このモデルは有力な説として考えられている (Nagasawa et al. 2008)。

#### 3.1 重力相互作用の効果

惑星同士の重力相互作用による軌道の不安定化が起こることは Chambers et al. (1996), Marzari & Weidenschilling (2002), Chatterjee et al (2008) などの数値シミュレーションによって確認されている。惑星が2つの場合と3つ以上の場合において不安定の起こる条件が異なる。惑星が2つの場合は惑星同士の軌道間隔  $\Delta$  が以下のような条件を満たしている場合、軌道不安定は起きない (Gladman 1993)。

$$\Delta \geq 2\sqrt{3}r_{H(1,2)} \quad (3.1.1)$$

ここで惑星1の軌道長半径と質量をそれぞれ  $a_1, m_1$ 、惑星2の軌道長半径と質量をそれぞれ  $a_2, m_2$ 、中心星の質量を  $M_*$  とすると、相互ヒル半径  $r_{H(1,2)}$  は以下のように定義される。

$$r_{H(1,2)} = \frac{a_1 + a_2}{2} \left( \frac{m_1 + m_2}{3M_*} \right)^{1/3} \quad (3.1.2)$$

それに対し、惑星が3つ以上の場合には、全てのペアの惑星同士がそれぞれ上記の条件を満たしていたとしても最終的には軌道不安定の段階へ入ることがわかっている。典型的に、軌道不安定により1つの惑星が系の外へ放出され、2つの惑星が楕円軌道を持って安定化する (Marzari & Weidenschilling 2002)。

惑星間の軌道間隔を以下のように相互ヒル半径を用いて表すと、

$$a_{i+1} = a_i + Kr_{H(i,i+1)} \quad (3.1.3)$$

軌道不安定に至るまでのタイムスケールの対数は  $K$  の増加に従って、おおよそ指数関数的に増加することがわかっている (Chatterjee et al 2008)。また、最終的に内側に残る惑星に

については、惑星質量が小さいほど離心率が大きくなり、軌道長半径が小さくなる傾向を持つ (Chatterjee et al 2008). 軌道不安定について具体的な描像を把握するため重力相互作用の数値シミュレーションを次の章で行うこととする.

### 3.2 中心星の潮汐効果による円軌道化

天体は大きさを持っているため、天体の表面や内部の各点に働く他天体からの重力の大きさや向きは一定ではない. 地球の月の場合を考えると月の地球側の地点では、反対側の地点に比べて地球から受ける重力がやや強い. その一方、月の公転運動による遠心力は、回転半径の違いから、地球に向いた地点よりも地球の反対側の地点の方が大きい. 地球の及ぼす重力と遠心力の合力を考えると、地球側の地点は地球に向かう方向に、地球の反対側の地点では地球から遠ざかる方向に力が働く. ちなみに月の重心では地球の及ぼす重力と遠心力が釣り合っている. このように、他天体からの重力と公転運動による遠心力の合力が潮汐力である. 潮汐力により天体に生じる膨張部を潮汐バルジと呼ぶ. 潮汐力は惑星と恒星の間でも生じる. 潮汐バルジから受ける重力トルク (潮汐トルク) と、天体が変形するのに伴う変形摩擦によるエネルギー散逸 (潮汐散逸) によって惑星の軌道は変化する.

惑星が楕円軌道を持っている段階では、惑星の変形による潮汐散逸が、恒星の変形によるそれよりも大きい. 惑星の変形による潮汐散逸はさらに2つに分けることができ、1つは潮汐バルジの方向が惑星の公転に合わせて少しずつ変化するため生じる散逸、もう1つは惑星が中心星に近いときには大きく変形し遠いときには変形しないため生じる散逸である. 惑星軌道が円軌道に近い場合は前者の方が有効となる.

ここでは楕円軌道の惑星の円軌道化について考えるので後者の潮汐力の大きさの変化による潮汐散逸の効果について考察する. 簡単のため質量  $m_1$  の中心星と質量  $m_2$  の惑星 1 の 2 体問題を全系の重心を原点とした重心系において考える. この場合、重心の周囲の公転運動による系全体の軌道エネルギー  $E$  と重心を中心とした角運動量  $L$  は次のようにあらわされる.

$$E = -\frac{G\mu(m_1 + m_2)}{2a} \quad (3.2.1)$$

$$L = \mu\sqrt{(1 - e^2)(m_1 + m_2)aG} \quad (3.2.2)$$

ここで  $G$  は万有引力定数、 $a$  は相対軌道長半径、 $\mu$  は換算質量で  $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  である. 式 (3.2.1) の両辺を時間微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{Gm_1 m_2}{2E^2} \dot{E} \\ &= \frac{2a^2}{Gm_1 m_2} \dot{E} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

となる. ここで  $\dot{E}$  は潮汐散逸によるエネルギー減少を表し、 $\dot{E} < 0$  である. よって  $\dot{a} < 0$  となる.

同様に式 (3.2.2) の両辺を時間微分し, 角運動量の保存を仮定すると  $\dot{L} = 0$  を用いて以下の式を得る.

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{2ae} \dot{a} \quad (3.2.4)$$

さらに式 (3.2.3) を用いると,

$$\dot{e} = \frac{1}{Gm_1m_2} \frac{(1 - e)(1 + e)a}{e} \dot{E} \quad (3.2.5)$$

近点距離  $q = a(1 - e)$  を用いると  $e \sim 1$  の場合式 (3.2.5) は次のようになる.

$$\dot{e} = \frac{2q}{Gm_1m_2} \dot{E} \quad (3.2.6)$$

ここでも  $\dot{E} < 0$  なので  $\dot{e} < 0$  となる.

さらに円軌道化した惑星の軌道長半径  $a_{fin}$  と初期の軌道長半径  $a_{ini}$  と離心率  $e_{ini}$  の関係は軌道角運動量保存を仮定すると, 式 (3.2.2) より

$$\begin{aligned} a_{fin} &= a_{ini}(1 - e_{ini}^2) \\ &= q_{ini}(1 + e_{ini}) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

となる. 円軌道であれば  $a_{fin} = q_{fin}$  であり,  $e_{ini} \sim 1$  であると仮定すると,  $q_{fin} \sim 2q_{ini}$  となり, 近点距離は 2 倍程度大きくなるのがわかる. これに対して軌道長半径は  $q_{ini}(1 + e_{ini})/(1 - e_{ini})$  からほぼ  $2q_{ini}$  まで変化する. 初期離心率が 1 に近ければ, 軌道長半径は著しく減少する.

以上のことから, 近点が中心星に近い楕円軌道を持つ惑星は, 潮汐散逸によって軌道長半径と離心率を減少させるような軌道変化をするということがわかる. これは図 1 で軌道長半径の小さい惑星でだけ離心率が低いところに集中していることを説明する.

## 4 重力相互作用のシミュレーション

### 4.1 基礎方程式

下付き文字で天体を区別し, 中心星を 1, 惑星の番号を内側から順に 2, 3, 4 とする. 天体  $j$  の運動方程式は, 他の天体からの重力をすべて足し上げて次のように表される.

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = \sum_{i \neq j} \frac{Gm_i m_j}{r_{(i,j)}^3} \mathbf{r}_{(i,j)} \quad (4.1.1)$$

ここで  $\mathbf{r}_j$  は天体  $j$  の位置ベクトル,  $m_i$  は天体  $i$  の質量,  $G$  は万有引力定数,  $\mathbf{r}_{(i,j)}$  は天体  $i$  と天体  $j$  の相対位置ベクトルを表す. この運動方程式を数値積分することで各天体の位置と速度の時間発展を求めることができる.

## 4.2 数値計算法

ここでは3つの積分法について述べる。本研究では惑星の軌道計算にはエルミート法を用いるが、より簡単な積分法であるオイラー法とルンゲクッタ法についても説明する。

### 4.2.1 オイラー法

オイラー法は最も初歩的な積分法であり、非常に簡単に積分計算をすることができる反面、精度は低い。次の  $x$  が時間と共に変化していく微分方程式で考える。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (4.2.1)$$

ここで  $t$  は時間、 $x$  は位置ベクトル、 $f$  は  $x$  と  $t$  の与えられた関数である。時間刻み幅を  $\Delta t$  とすると、 $x(t + \Delta t)$  はテイラー展開することによって次のように表される。

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \Delta t^2 + \dots \quad (4.2.2)$$

ここで  $(\Delta t)^2$  以降の項を無視すると、 $t_{i+1} = t + \Delta t$  における位置ベクトル  $x_{i+1}$  は以下のようになる。

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i) \Delta t \quad (4.2.3)$$

これを繰り返して各時刻における位置ベクトルの近似解を得ることができる。これがオイラー法であり、時間刻み幅に対して1次の精度を持った積分法である。

### 4.2.2 ルンゲクッタ法

オイラー法では微係数として時刻  $t = t_i$  での値のみを使用したが、ルンゲクッタ法では  $t = t_i + \Delta t$  とその中間点での値の平均値を使用する。4次の精度を持つルンゲクッタ法の公式は以下である。

$$k_1 = f(x_i, t_i) \quad (4.2.4)$$

$$k_2 = f(x_i + k_1 \Delta t/2, t_i + \Delta t/2) \quad (4.2.5)$$

$$k_3 = f(x_i + k_2 \Delta t/2, t_i + \Delta t/2) \quad (4.2.6)$$

$$k_4 = f(x_i + k_3, t_i + \Delta t) \quad (4.2.7)$$

$$x_{i+1} = x_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \frac{\Delta t}{6} \quad (4.2.8)$$

ここで  $k_1$  は  $t = t_i$  での微係数、 $k_2$  は微係数  $k_1$  で  $\Delta t/2$  だけ進めた位置座標での微係数というように4点での微係数を用いる。

### 4.2.3 エルミート法

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g(x, t) \quad (4.2.9)$$

ここでは3次元直交座標系における位置ベクトル  $x$  の2階微分方程式 (4.2.9) を解くことを考える。ここで  $g$  は位置座標と時間の関数である。まず時刻  $t = t_i$  における加速度  $a_i$  の1階微分までの項を用いたテイラー展開により、位置と速度の予測子  $x_p, v_p$  を求める。

$$x_{pi} = x_i + v_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} a_i + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{da_i}{dt} \quad (4.2.10)$$

$$v_{pi} = v_i + a_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{da_i}{dt} \quad (4.2.11)$$

ここで  $x_i, v_i$  は時刻  $t = t_i$  における位置座標と速度ベクトルである。 $da_i/dt$  は  $g(x, t)$  の1階微分であるが、重力だけを考える場合には位置座標と速度ベクトルを用いて簡単に表すことができ、次のようになる

$$a_i = -Gm_k \frac{r_k}{r_k^3} \quad (4.2.12)$$

$$\frac{da_i}{dt} = -Gm_k \left[ \frac{v_k}{r_k^3} - \frac{3(r_k \cdot v_k)r_k}{r_k^5} \right] \quad (4.2.13)$$

ここで  $m_k$  は天体  $k$  の質量、 $r_k$  はその天体からの相対位置ベクトル、 $v_k$  は相対速度ベクトルを表す。重力を与える天体が複数個ある場合にはそれぞれの質量、距離、速度を用いた式 (4.2.12), (4.2.13) を足し合わせるとよい。

さらに求めた予測子を用いて時刻  $t = t_i + \Delta t$  での加速度  $a_{i+1}$  と  $da_{i+1}/dt$  を求める。そして多項式補間によって  $a_i, da_i/dt, a_{i+1}, da_{i+1}/dt$  を用いて  $d^2 a_i/dt^2, d^3 a_i/dt^3$  を次のように求めることができる (7.5 章参照)。

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} = \frac{-6(a_i - a_{i+1}) - \Delta t \left( 4 \frac{da_i}{dt} + 2 \frac{da_{i+1}}{dt} \right)}{\Delta t^2} \quad (4.2.14)$$

$$\frac{d^3 a_i}{dt^3} = \frac{12(a_i - a_{i+1}) + 6\Delta t \left( \frac{da_i}{dt} + \frac{da_{i+1}}{dt} \right)}{\Delta t^3} \quad (4.2.15)$$

以上を用いて  $x_{i+1}, v_{i+1}$  を求める。

$$x_{i+1} = x_{pi} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{d^2 a_i}{dt^2} + \frac{\Delta t^5}{120} \frac{d^3 a_i}{dt^3} \quad (4.2.16)$$

$$v_{i+1} = v_{pi} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{da_i}{dt} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{d^2 a_i}{dt^2} \quad (4.2.17)$$

### 4.3 設定

本シミュレーションでは2次元の  $xy$  重心系座標系に中心星と3つの惑星を置き、その重力相互作用を計算して各惑星の運動を記述する。原点は全系の重心とし、中心星重力と遠心力が釣り合うケプラー速度の初期速度を与える。

惑星の軌道長半径と軌道離心率の進化は、各時刻における惑星の運動を、中心星と惑星の2体問題の解で近似することによって求めることができる。各惑星の運動に対して全系の重

心を保存するような中心星の運動は,  $v_1 = v_i m_i / m_1$ ,  $r_1 = r_i m_i / m_1$  と表せる. まず軌道エネルギー  $E$  (運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和) は

$$E_i = \frac{1}{2} m_i \left( 1 + \frac{m_i}{m_1} \right) (v_i - v_{cen})^2 - \frac{G m_1 m_i}{r_{(1,i)}} \quad (4.3.1)$$

と表すことができる. ここで  $v_{cen}$  は 2 体間の重心の速度である. 重心との相対速度を用いることによって, 重心の周囲の公転運動によるエネルギーを求めることができる. 一方, 軌道角運動量  $L$  は,

$$L_i = m_i \left( 1 + \frac{m_i}{m_1} \right) (\mathbf{r}_i \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cen})) \quad (4.3.2)$$

と表される. この後で 2 体近似をするので, ここでは惑星間のポテンシャルエネルギーは無視している.

2 体近似をして, 換算質量  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  とすると軌道長半径  $a$  と離心率  $e$  は

$$a_i = -\frac{G\mu(m_1 + m_i)}{2E_i} \quad (4.3.3)$$

$$e_i = \sqrt{1 - \frac{L_i^2}{\mu^2(m_1 + m_i)aG}} \quad (4.3.4)$$

と表すことができる (7.3.2 章参照).

本シミュレーションでは, 惑星質量を全て  $10^{-3} M_\odot$  に固定して初期惑星間軌道間隔を  $1.25 + 0.25k$  AU ( $k = 1, 5$ ) と変えた計算と, 惑星間の初期軌道間隔を全て 2.5 AU して惑星質量を  $k \times 10^{-3} M_\odot$  ( $k = 1, 5$ ) と変えた計算をそれぞれ, 惑星の公転方向の初期位置を 3 回変えて計 30 回の計算を行った. どの計算においても最も内側の惑星の初期位置は木星の位置とし, 初期離心率はすべて 0 とした.

#### 4.4 シミュレーション結果

はじめに典型的な軌道長半径の時間変化を図 3 に示す. ここでは惑星質量を  $10^{-3} M_\odot$  とし, 惑星の初期位置は軌道間隔をそれぞれ 2 AU で一直線に並べた場合の結果を示している. この系では 1 つの惑星が系の外に放出され, 1 番内側へと移動した惑星の軌道長半径は初期の半分程度となった. 今回の数値計算ではすべての試行で同様の傾向が見られた. この結果は先行研究 (Marzari & Weidenschilling 2002) でなされたものと同様である. 今後は計算開始から 1 つの惑星が系の外へ放出されるまでのタイムスケールを軌道不安定までのタイムスケールとして用いることとする.

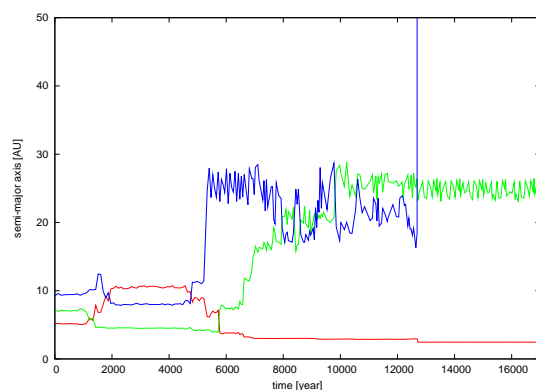


図 3: 3 つの惑星の重力相互作用による軌道長半径の時間変化

次に, 図 4 に惑星質量を固定した場合の初期軌道間隔と軌道不安定になるまでのタイムスケールを示す. 図 4 より, 初期軌道間隔が広いほど軌道不安定までのタイムスケールが長くなる傾向を持つことが確認できる. これは Chatterjee et al 2008 における結果と同様である.

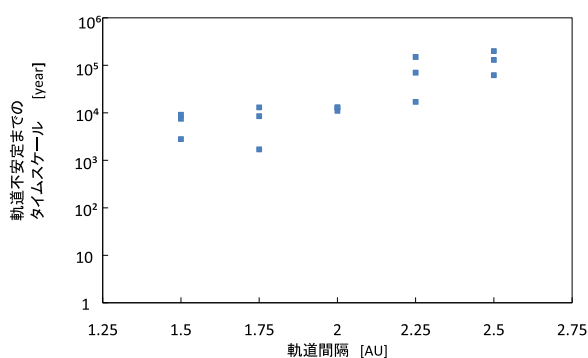


図 4: 惑星間の軌道間隔と軌道不安定までのタイムスケール

次に, 図 5 に惑星初期軌道間隔を固定した場合の惑星質量と軌道不安定までのタイムスケールを示す. 図 5 より, 惑星質量が大きくなるほど軌道不安定になるまでのタイムスケールが短くなる傾向を持つことがわかる.

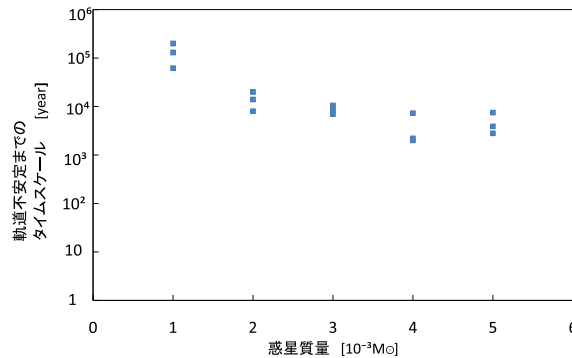


図 5: 惑星質量と軌道不安定までのタイムスケール

惑星間の重力相互作用の結果, 1つの惑星が系の外へと放出された直後に系に残った2つの惑星のうち内側のものの軌道長半径と離心率の分布を図6に示す. 軌道長半径は2-3 AUのところ集中しており, 初期に最も内側に存在した惑星 ( $a \simeq 5$  AU) の半分程度となっている. また, 離心率は広く分布している.

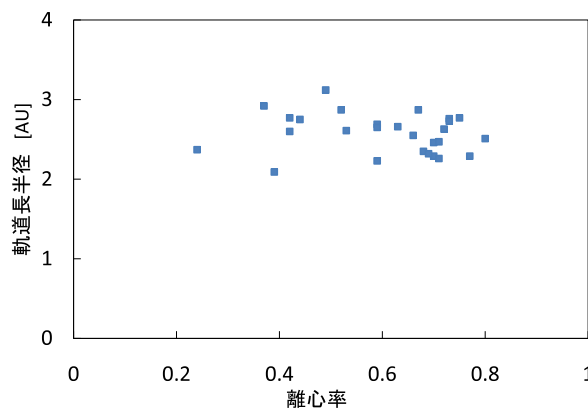


図 6: 最終的に残った惑星の軌道長半径と離心率

スリングショットモデルでは内側の惑星が中心星の潮汐作用で円軌道化することを考えているが, 太陽質量程度の中心星の場合, 近点距離  $q$  が  $q < 0.05$  AU でなければ潮汐力が作用しない (Rasio & Ford 1996). 今回の計算で得た近点距離の最小値は 0.5 AU であり, ホットジュピターをつくることができない. 今回は計算法の取得が目標の1つであることから, 単純化した2次元座標系での運動しか考えておらず, 軌道傾斜角を考慮するなどしてより詳細な計算をしなければホットジュピター形成の可否は説明できない. しかしこの結果から, スリングショットモデルで想定しているホットジュピターをつくるような軌道進化をする確率は, 必ずしも高くはないといえるだろう.



## 5 中心星の自転速度と惑星の関係

### 5.1 中心星が変形する潮汐効果による惑星の落下

ここでは中心星の潮汐変形による効果で惑星の軌道がどのように変化するかについて考察する。惑星がほぼ円軌道化した後に効くようになり、中心星の自転運動と惑星の公転運動の間で角運動量の交換が起こる。系全体の力学的エネルギーと角運動量は次のようになる。

$$E = -\frac{G\mu(m_1 + m_2)}{2a} + \frac{1}{2}I_*\omega_*^2 \quad (5.1.1)$$

$$L = \mu\sqrt{(1 - e^2)(m_1 + m_2)aG} + I_*\omega_* \quad (5.1.2)$$

ここで  $I_*$ ,  $\omega_*$  はそれぞれ中心星の慣性能率と自転角速度である。式 (5.1.1) の両辺を時間微分し、惑星のケプラー角速度  $\Omega_p$  を用いると、

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{G\mu(m_1 + m_2)}{2a^2}\dot{a} + I_*\omega_*\dot{\omega}_* \\ &= \frac{1}{2}\mu\Omega_p^2 a\dot{a} + I_*\omega_*\dot{\omega}_* \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

となる。また、式 (5.1.2) も同様に時間微分をすると、

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{1}{2}\mu\sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}}a\dot{a} + I_*\dot{\omega}_* \\ &= \frac{1}{2}\mu\Omega_p a\dot{a} + I_*\dot{\omega}_* \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

となる。さらに角運動量保存則より  $\dot{L} = 0$  なので式 (5.1.4) から次の式を得る。

$$I_*\dot{\omega}_* = -\frac{1}{2}\mu\Omega_p a\dot{a} \quad (5.1.5)$$

式 (5.1.5) を式 (5.1.3) に代入すると、

$$\dot{E} = -\frac{1}{2}\mu\Omega_p a\dot{a}(\omega_* - \Omega_p) \quad (5.1.6)$$

となる。潮汐散逸によって常に  $\dot{E} < 0$  となるので  $\dot{a}$  の符号は  $(\omega_* - \Omega_p)$  の符号によって決まるといえることがわかる。

また、ケプラー速度が中心星の自転速度と等しくなる半径を共回転半径と呼ぶ。したがって、惑星が共回転半径より内側 ( $\omega_* < \Omega_p$ ) にあるか外側 ( $\Omega_p < \omega_*$ ) にあるかで潮汐による軌道半径の変化の向きが異なる。

図7は潮汐力によって変形した中心星による惑星軌道変化への効果を示した概念図である。右上の図は惑星が共回転半径より外側にある場合を示しており、ケプラー速度は外側領域の方が遅いので、ここでは惑星の公転速度は中心星の自転速度よりも遅い。よって中心星の潮汐バルジは惑星の公転方向に先行してできることになる。このため惑星は中心星の潮汐バルジから公転を加速される方向の潮汐トルクを受ける。つまり角運動量を得ることに

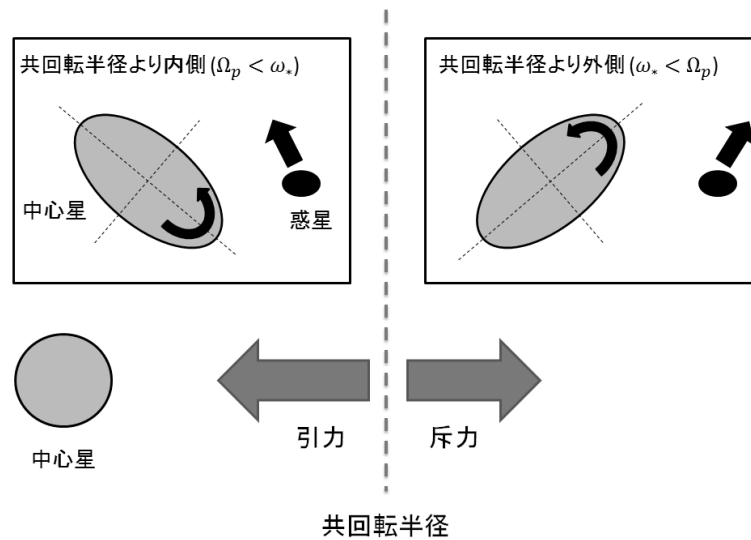


図 7: 中心星の潮汐変形による軌道進化の概念図 (井田茂 2003 を改変)

なるので軌道半径が大きくなる。一方左上の図は惑星が共回転半径よりも内側にある場合で、ここでは逆に潮汐バルジは惑星の公転に後続して生じる。よって惑星は公転にブレーキをかけられ内側へと移動する。

2.3 章で述べた惑星落下モデルでは、惑星落下のブレーキとしてこの潮汐効果が考えられている。このモデルでは惑星は外から移動してくるので、共回転半径に近づくと軌道半径を大きくする方向に働く潮汐トルクが強くなり、やがて移動が止まると考えられている。

以上のことから共回転半径よりも内側に存在するホットジュピターは中心星へと落下してしまうため、ホットジュピターが持続的に存在するためには共回転半径よりも外側にあることが必要となる。

## 5.2 惑星の軌道変化に伴う中心星の自転速度の変化

スリングショットモデルでは最初に木星と同程度の軌道長半径を持つ惑星を仮定し、その惑星がホットジュピターへと変化する。その際、惑星は角運動量を失って軌道長半径が小さくなる。惑星間の重力相互作用による軌道変化は軌道長半径を半分程度にまで小さくすることが可能であり、その際の角運動量減少量は主に外側へと移動する惑星が請け負う。しかし、そこからさらに内側 (軌道長半径  $a < 0.1$  程度) へと移動する際の角運動量の減少は中心星が請け負うことになる。ここでは惑星の軌道変化に伴う中心星の自転周期の変化を見積もる。

質量  $m$  の惑星の軌道長半径、離心率がそれぞれ  $a_0$  から  $a_1$ ,  $e_0$  から  $e_1$  へと変化した場合を

考える. 質量  $M$  の星を中心とした角運動量の減少量を  $\Delta L$  とすると,

$$\Delta L = m \left( \sqrt{GMa_{fin}(1 - e_{fin}^2)} - \sqrt{GMa_{ini}(1 - e_{ini}^2)} \right) \quad (5.2.1)$$

となる (7.3.1 章参照).

中心星の自転角速度の変化  $\Delta\omega_*$  は以下ようになる,

$$\Delta\omega_* = \frac{\Delta L}{I} \quad (5.2.2)$$

ここで  $I$  は中心星の慣性能率である.

初期に周期 10 日で自転している中心星が惑星の軌道進化の影響でどれほどの自転周期になるかを見積もる. 初期に軌道長半径と離心率がそれぞれ  $a_{ini} = 2.5$  AU (木星の約半分),  $e_{ini} = 0.98$  の惑星が, 最終的にそれぞれ  $a_{fin} = 0.02$  AU,  $e_{fin} = 0$  となる場合を考えると, 中心星の自転周期  $P_{rot}$  は, 以下ようになる.

$$P_{rot} \simeq 2.2 \left( \frac{I}{MR^2} \right) \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{m_J} \right)^{-1} \text{ 日} \quad (5.2.3)$$

図 8 は太陽と同様の恒星の自転周期と年齢の関係を示したものであり, 緑の点はホットジュピターを持つ恒星, 青の点はホットジュピターを持たない恒星を示している. 図 8 より, ホットジュピターを持つ恒星はそうでない恒星よりも自転周期が短くなる可能性が示唆される. 惑星がホットジュピターへと軌道進化する効果はこの傾向の原因の 1 つとして考えられる.

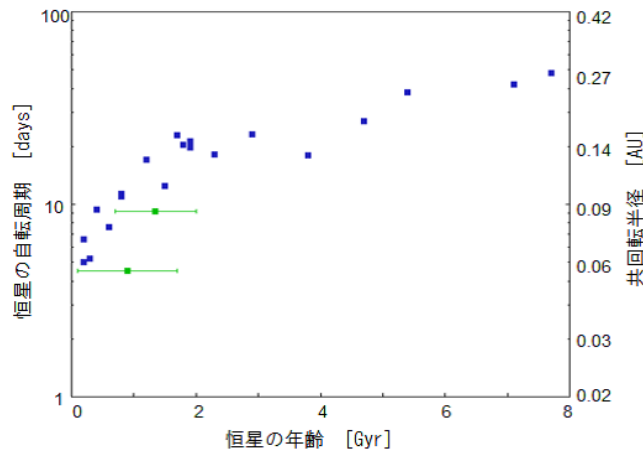


図 8: 恒星の年齢と自転周期 青い点は太陽と同タイプの恒星 (Mama-jek & Hillenbrand 2008 より年齢のデータを, Baliunas 1996, Noyes et al. 1984 より自転周期のデータを引用), 緑の点はホットジュピターを持つ恒星 (Lanza 2010 よりデータを引用) を示す

### 5.3 恒星風による恒星の自転速度の変化

星間空間において水素とヘリウムの密度が高く、水素が主に水素分子として存在している領域を分子雲と呼び、その中でも特に密度の高い部分を分子雲コアと呼ぶ。自己重力によって分子雲ガスは収縮していき、その中心に恒星が形成される。一方、分子雲はゆっくり回転しており回転軸に垂直な方向には遠心力が効くため、遠心力と重力が釣り合う点より内側へは直接収縮できない。そのため形成期の恒星の周りにはガス円盤も同時に形成される。このとき角運動量の保存のために分子雲コアの収縮とともに回転速度が大きくなっていく。

恒星の初期段階である T-タウ型星の自転周期は 8 日周辺に集中している (Bouvier et al. 1993)。そして時間と共に恒星の自転角速度は遅くなっていく。図 8 を見ると、年齢と自転周期に強い相関が認められる。このような恒星の自転周期の年齢に伴う増加は、恒星風を通じた角運動量の放出によると考えられている。

惑星軌道半径を  $r$ 、中心星質量を  $M$ 、中心星の自転周期を  $T$  とすると、惑星のケプラー速度  $\Omega_p$  は  $\Omega_p = \sqrt{GM/r^3}$  であり、中心星の自転角速度  $\Omega_*$  は  $\Omega_* = 2\pi/T$  なので共回転半径  $r_c$  は以下のように表すことができる。

$$r_c = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} (GM)^{1/3} \quad (5.3.1)$$

共回転半径は中心星の自転角速度が遅いほど大きい。つまり恒星の年齢に伴って共回転半径が大きくなっていくと考えられる。

### 5.4 中心星の年齢と惑星の軌道長半径

惑星が共回転半径よりも内側に存在すると潮汐の効果で中心星へと落下してしまうことと、恒星の自転速度は次第に遅くなっていき共回転半径が大きくなっていくことから、年齢の高い恒星はホットジュピターを保持しにくいという仮説を立てられる。

図 9 は発見された系外惑星の軌道長半径とその中心星の年齢の関係を示したものである。軌道長半径が  $a < 0.04$  AU の系では中心星の年齢の平均が 2.75 年で標準偏差が 2.30 であるのに対し、 $a \geq 0.04$  AU の系ではそれぞれ 4.92 年、3.06 である。これを見ると軌道長半径が約 0.04 AU より小さい惑星は中心星の年齢が低いところに集中する傾向が確認できる。

しかし、この中には年齢が 60 億年を超える系も 3 つ見られる。中心星の潮汐変形による軌道進化のタイムスケール  $\tau_a$  は  $\tau_a \propto (m_*^{1/2}/m_p)$  となる (Murray & Dermott 1999)。図 10 は軌道長半径が 0.04 AU 以下の惑星を持つ系における、中心星の年齢と (中心星質量)<sup>1/2</sup>/惑星質量比の関係を示したものである。赤い丸がついているものは図 9 と対応している。図 10 を見ると年齢が高い星が軌道長半径の小さい惑星を持つ系では (中心星質量)<sup>1/2</sup>/惑星質量比が高いということがわかる。つまり、このような系では中心星の潮汐変形による軌道進化のタイムスケールが大きいため、ホットジュピターが残っていると考えられる。このことを考慮すると図 9 は年齢が高い星はホットジュピターを保持しにくいという仮説を

支持するものとなる。

年齢の高い恒星はホットジュピターを保持しにくいという仮説は、恒星の自転速度が年齢と共に遅くなっていくという過程の下に説明できる。つまり、年齢が高い段階の恒星では惑星からの角運動量輸送によるスピナップよりも、恒星風を通したスピンドアウンの方が効果的に効くと言える。このことから、恒星の潮汐によって生じるホットジュピターへの軌道変化は恒星の年齢に対して十分短いタイムスケールで生じると考えられる。

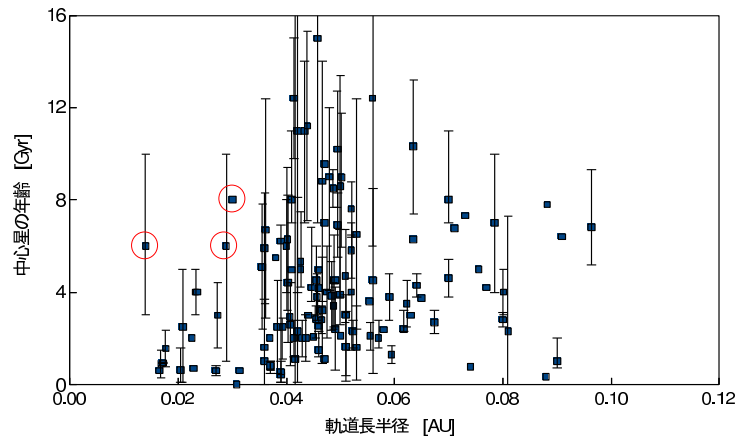


図 9: 発見された系外惑星の軌道長半径と中心星の年齢 (Schneider 2011 よりデータを引用)

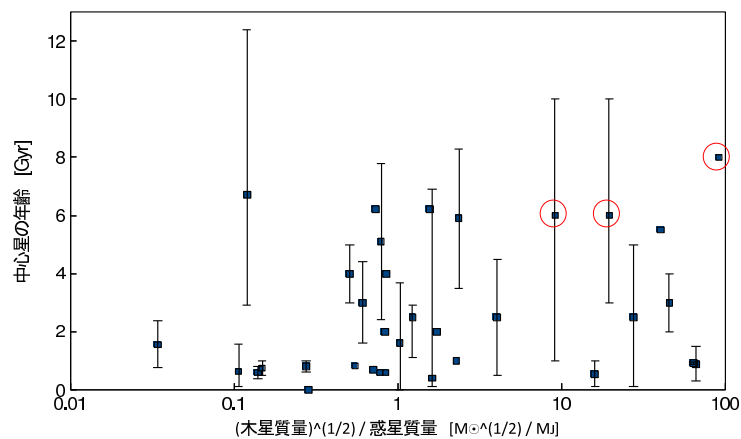


図 10:  $a < 0.04$  AU の惑星を持つ恒星の、年齢と (中心星質量) $^{1/2}$ /惑星質量比 (Schneider 2011 よりデータを引用)

## 6 まとめ

スリングショットモデルでは、太陽系標準モデルと同様に氷形成領域に円軌道を持って形成された複数の巨大惑星が、互いの重力相互作用によって軌道を乱す。その結果、近点が中心星に近い楕円軌道を持つ惑星へと軌道進化する。その惑星は中心星の潮汐作用で軌道長半径を小さくしながら円軌道化され、ホットジュピターが形成される。

3つ以上の巨大惑星が同じ系に存在するとき、惑星同士の重力相互作用によって互いの軌道を乱し、1つの惑星が系の外に放出されることで安定化することが数値計算によってわかった。しかし、今回の計算では内側に残った惑星の近点距離が、中心星の潮汐作用を受けるほど近くはならなかった。このことから、スリングショットモデルで想定しているホットジュピターをつくるような軌道進化をする確率は必ずしも高くはないということがいえる。

楕円軌道を持つ惑星が中心星の潮汐効果によって円軌道化する過程では、惑星の変形による効果が有効となる。潮汐力による惑星の変化は中心星に近いときのみ生じるので、変形に伴う摩擦によるエネルギー散逸によって軌道が変化する。この変化で軌道長半径を著しく減少させ、円軌道化することがわかった。また、惑星の円軌道化に際して、中心星へと角運動量の輸送がなされるため、ホットジュピターを持つ恒星は自転周期が短くなる可能性がある。

惑星が円軌道化した後は、中心星の潮汐変形の効果が有効となる。ここでは惑星が共回転半径よりも内側にあるか、外側にあるかで移動の方向が異なる。共回転半径よりも内側にある惑星は内側へ、外側にある惑星は外側へと移動する。また、共回転半径は中心星の自転周期が長いほど大きくなる。

恒星は年齢と共に自転周期が長くなるため、共回転半径は大きくなる。このため軌道長半径が小さい惑星は共回転半径の内側に存在することになり、中心星へと落下してしまう。よって、年齢の高い恒星はホットジュピターを保持しにくいと考えられる。また、同時にこのことから、年齢の高い段階の恒星では自転周期が遅くなっていることがわかり、中心星の潮汐作用による軌道進化のタイムスケールは恒星の年齢よりも十分短いということがわかる。

## 7 APPENDIX

### 7.1 ヒル半径

ヒル半径は重力圏半径とも呼ばれ、惑星の重力が中心星の重力よりも優勢になっている範囲を示す。中心星と惑星の距離を  $r$ 、中心星の物理半径を  $R$ 、中心星と惑星の質量をそれぞれ  $M_*$ 、 $M_p$ 、ケプラー速度を  $\Omega_K$  とする。中心星と惑星の間に惑星から距離  $a$  のところに質量  $m$  の物体を置く。惑星からヒル半径の距離に置いた物質には力が釣り合うので、力のつりあいの式は次のようになる。

$$\frac{GM_*m}{(R-a)^2} = \frac{GM_pm}{a^2} + m(R-a)\Omega_K^2 \quad (7.1.1)$$

ここで  $\Omega_K^2 = \frac{GM_*}{r^3}$  を代入すると、

$$\frac{GM_*m}{(r-a)^2} = \frac{GM_pm}{a^2} + \frac{Gm(r-a)M_*}{r^3} \quad (7.1.2)$$

$(r-a)^{-2}$  を 1 次までテイラー展開すると、

$$\frac{1}{(r-a)^2} \simeq \frac{1}{r^2} + \frac{2a}{r^3} \quad (7.1.3)$$

となるので、

$$\frac{M_*}{r^2} + \frac{2aM_*}{r^3} = \frac{M_p}{a^2} + \frac{M_*}{r^2} - \frac{aM_*}{r^3} \quad (7.1.4)$$

$$a = r \left( \frac{M_p}{3M_*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.1.5)$$

## 7.2 楕円の式

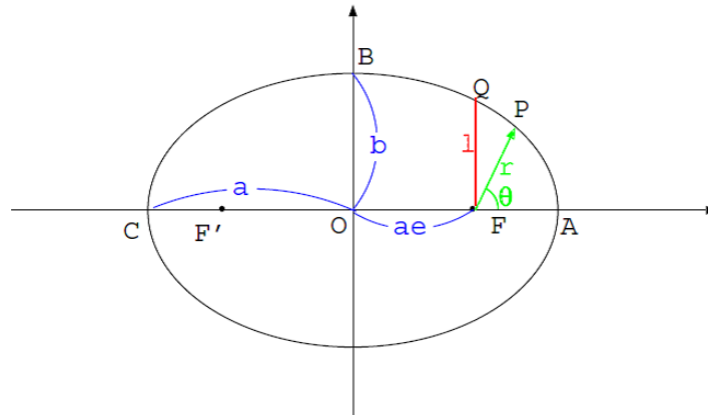


図 11: 楕円の極座標表示 (東京大学教養学部 2007 年度冬学期 宇宙科学 II (海老沢) 講義ノート)

惑星は中心星の周りを楕円軌道で回転している. そこで, 惑星の位置を楕円の方程式を用いて表すことが有用である. ここでは楕円の方程式の導出を行う.  $F'P$  の長さを  $r'$  とすると,  $\triangle FF'P$  において余弦定理より

$$r'^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2(2ae)r \cos \phi \quad (7.2.1)$$

ここで  $r' = 2a - r$  を代入すると

$$r(1 + e \cos \phi) = a(1 - e^2) \quad (7.2.2)$$

また,  $\triangle FF'C$  において三平方の定理より

$$a(1 - e^2) = l \quad (7.2.3)$$

式 (7.2.2) を式 (7.2.1) に代入すると

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \phi} \quad (7.2.4)$$

となり, これが焦点を原点とした極座標における楕円の式である. また,  $l, e$  はそれぞれ半直弦, 離心率である.

## 7.3 軌道エネルギーと角運動量

### 7.3.1 中心星を原点とした場合

中心星の潮汐効果による軌道要素 ( $a, e$ ) の変化はエネルギーの潮汐散逸と, 中心星との角運動量の輸送によって起こる. そのため, 軌道要素の時間変化を知るためには軌道エネルギーと角運動量を軌道要素の関数として扱うことが必要となる. ここでは中心星を原点と



した場合の、惑星の軌道エネルギーと角運動量を導出する。

軌道エネルギー  $E$  は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和で表される。

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r} \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

$m$  は惑星質量,  $v_r$  は  $r$  方向の速度,  $v_\theta$  は  $\theta$  方向の速度を表す。

ここで角運動量  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$  とすると,

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (7.3.2)$$

$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta}$  なので,

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (7.3.3)$$

ここで  $u \equiv 1/r$  とすると,

$$E = \frac{L^2}{2m} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2 u^2}{2m} - GMmu \quad (7.3.4)$$

$$\frac{2mE}{L^2} = \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \left( u - \frac{GMm^2}{L^2} \right)^2 - \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4} \quad (7.3.5)$$

$$d\theta = \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \left( u - \frac{GMm^2}{L^2} \right)^2 + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}} \quad (7.3.6)$$

積分公式  $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)} = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$  を用いて

$$\theta = \pm \arccos \frac{u - \frac{GMm^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}} \quad (7.3.7)$$

両辺の  $\cos$  をとると

$$\cos \theta = \frac{u - \frac{GMm^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}} \quad (7.3.8)$$

よって

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} \cos \theta} \quad (7.3.9)$$

ここで  $l \equiv \frac{L^2}{GMm^2}$ ,  $e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$  とすると

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \quad (7.3.10)$$

となりこれは焦点を原点とした極座標における楕円の式である。ここでは中心星を原点としているので、中心星を焦点とした楕円軌道を表す。\$l, e\$ はそれぞれ半直弦、離心率である。また、楕円の式において軌道長半径 \$a = \frac{l}{1-e^2}\$ となるので \$l, e\$ を代入すると

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (7.3.11)$$

また、\$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\$ なので

$$L = m\sqrt{(1-e^2)aGM} \quad (7.3.12)$$

### 7.3.2 重心を原点とした場合

2体問題を考えるとき、換算質量を用いると1体問題のように扱うことができ有用である。ここでは重心系座標において、系全体の軌道エネルギーと重心の周りを周る角運動量を導出する。中心星の質量、位置ベクトルをそれぞれ \$m\_1, \mathbf{r}\_1\$、惑星の質量、位置ベクトルをそれぞれを \$m\_2, \mathbf{r}\_2\$ とすると、重心ベクトル \$\mathbf{R}\$、相対ベクトル \$\mathbf{r}\$ をそれぞれ以下のようになる。

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (7.3.13)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (7.3.14)$$

まず、中心星と惑星が重心の周りを周る角運動量を導出する。重心からの位置 \$r'\_1, r'\_2\$ は式 (7.3.13), (7.3.14) より

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad (7.3.15)$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad (7.3.16)$$

よって重心の周りを回る角運動量 \$L\$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r}'_1 \times m_1 \frac{d\mathbf{r}'_1}{dt} + \mathbf{r}'_2 \times m_2 \frac{d\mathbf{r}'_2}{dt} \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \mu \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

次に軌道エネルギー \$E\$ を導出する。式 (7.3.13), (7.3.14) より

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad (7.3.18)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad (7.3.19)$$

\$E\$ は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和で表されるので、ポテンシャルエネルギーを \$V\$ とすると系全体の軌道エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (7.3.20)$$

式 (7.3.18), (7.3.19) より

$$\dot{r}_1^2 = \dot{R}^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \dot{R}\dot{r} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 \quad (7.3.21)$$

$$\dot{r}_2^2 = \dot{R}^2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \dot{R}\dot{r} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 \quad (7.3.22)$$

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{R}^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dot{r}^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (7.3.23)$$

重心座標系を考えるので  $\dot{R} = 0$  とする. よって換算質量  $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  を用いると

$$\begin{aligned} E &= \mu \dot{r}^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} \\ &= \frac{\mu}{2} (v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{Gm_1 m_2}{r} \\ &= \frac{\mu}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

となる.  $v_r$  は  $r$  方向の速度,  $v_\theta$  は  $\theta$  方向の速度を表す.

最後に軌道エネルギー  $E$  と角運動量  $L$  を軌道要素  $a, e$  であらわすために式を変形していく. なお, ここでは全系の重心を原点としているので, 軌道要素も重心を焦点としたものとなる. 前章と同様の変形を施していくと以下ようになる.

$$E = -\frac{G\mu(m_1 + m_2)}{2a} \quad (7.3.25)$$

$$L = \mu \sqrt{(1 - e^2)(m_1 + m_2)aG} \quad (7.3.26)$$

## 7.4 打ち切り誤差

$x(t + \Delta t)$  をテイラー展開すると,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + \dots \quad (7.4.1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (7.4.2)$$

となるが, 実際に計算を行う場合には無限大まで足し合わせることはできないのでどこかで計算を打ち切ることになる. その際に生じる誤差が打ち切り誤差である. 例えばオイラー法を用いた計算の場合,  $\Delta t^2$  以降の項を打ち切っているので誤差の大きさは  $O(\Delta t^2)$  となり  $O(\Delta t)$  の項まではテイラー展開と一致する. このためオイラー法は時間刻み幅に対して1次の精度を持つということがわかる. また, 4次のルンゲクッタ法は名前の通り4次の精度を持っている. 一方, エルミート法では位置については5次の精度を持っており, 速度については4次の精度を持っている.

## 7.4.1 4次のルンゲクッタの精度の証明

4次のルンゲクッタ法は時間刻み幅に対して4次の精度を持っており、それを以下で確認する。

$k_1, k_2, k_3, k_4$  をそれぞれ  $\Delta t, x, f$  を用いて表すと、

$$k_1 = f(x) \quad (7.4.3)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x + \frac{1}{2}k_1\Delta t\right) = f\left(x + \frac{1}{2}f(x)\Delta t\right) \\ &= f(x) + f'(x)\left(\frac{1}{2}f(x)\Delta t\right) + \frac{1}{2}f''(x)\left(\frac{1}{2}f(x)\Delta t\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}f'''(x)\left(\frac{1}{2}f(x)\Delta t\right)^3 + O(\Delta t^4) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}f(x)f'(x)\Delta t + \frac{1}{8}f^2(x)f''(x)\Delta t^2 \\ &\quad + \frac{1}{48}f^3(x)f'''(x)\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x + \frac{1}{2}k_2\Delta t\right) \\ &= f(x) + f'(x)\left(\frac{1}{2}k_2\Delta t\right) + \frac{1}{2}f''(x)\left(\frac{1}{2}k_2\Delta t\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}f'''(x)\left(\frac{1}{2}k_2\Delta t\right)^3 + O(\Delta t^4) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}f'(x)\left(f(x) + \frac{1}{2}f(x)f'(x)\Delta t + \frac{1}{8}f^2(x)f''(x)\Delta t^2\right)\Delta t \\ &\quad + \frac{1}{8}f'(x)\left(f(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(x)\Delta t\right)^2\Delta t^2 + \frac{1}{48}f'''(x)(f(x))^3\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}f(x)f'(x)\Delta t + \left[\frac{1}{4}f(x)(f'(x))^2 + \frac{1}{8}f^2(x)f''(x)\right]\Delta t^2 \\ &\quad + \left[\frac{3}{16}f'(x)f''(x)(f(x))^2 + \frac{1}{48}f^3(x)f'''(x)\right]\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x) + f(x)f'(x)\Delta t + \left[\frac{1}{2}f(x)(f'(x))^2 + \frac{1}{2}f^2(x)f''(x)\right]\Delta t^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{4}f(x)(f'(x))^3 + \frac{5}{8}f^2(x)f'(x)f''(x) + \frac{1}{6}f^3(x)f'''(x)\right]\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

よって  $x(t + \Delta t)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\frac{\Delta t}{6} \\ &= x(t) + f(x)\Delta t + \frac{1}{2}f(x)f'(x)\Delta t^2 + \frac{1}{6}[(f(x))^2f''(x) + f(x)(f'(x))^2]\Delta t^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}[(f(x))^3f'''(x) + 4(f(x))^2f'(x)f''(x) + f(x)(f'(x))^3]\Delta t^4 \\ &\quad + O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

ここで以下の合成関数の積分公式を用いる.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f(x(t)) = f' \frac{dx}{dt} = ff' \\ \frac{d^2}{dt^2}f(x(t)) = \frac{d}{dt}(ff') = f(f')^2 + f^2 f'' \\ \frac{d^3}{dt^3}f(x(t)) = \frac{d}{dt}(f(f')^2 + f^2 f'') = f(f')^3 + 4f^2 f' f'' + f^3 f''' \end{cases} \quad (7.4.8)$$

式 (7.4.8) を式 (7.4.7) に代入すると,

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + f(x)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{df(x)}{dt} \Delta t^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{d^2 f(x)}{dt^2} \Delta t^3 + \frac{1}{24} \frac{d^3 f(x)}{dt^3} \Delta t^4 + O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

となる. これは  $\Delta t^4$  の項までのテイラー展開と一致する. よって 4 次のルンゲクッタ法は 4 次の精度を持っているということが確認できた.

## 7.5 多項式補間

$f(x)$  を以下のように近似する.

$$S_i(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n \quad (7.5.1)$$

ここである区間  $[a, b]$  を  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の部分区間に分け,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  を格子点とする. 各格子点での  $f(x)$  の値が与えられている場合,  $A_0, A_1, \dots, A_n$  を決定することができる. このようにすると  $f(x)$  を格子点間でも定義することができる.

特にエルミート補間は各格子点における  $f(x)$  と  $f'(x)$  が与えられている場合であり,  $2n+2$  個の値が定まっているため,  $A_{2n+1}$  まで決定することができる.

### 7.5.1 加速度の高度展開係数

$a_i(t_i)$  を以下のような 3 次多項式  $S_i$  で補間する.

$$S_i(t_i) = A_0 + A_1 t_i + A_2 t_i^2 + A_3 t_i^3 \quad (7.5.2)$$

ここで  $t_i = i\Delta t$  とする. 式 (7.5.2) が  $a_i(t_i)$  を補間しているということは次の関係が成り立つ.

$$S_i(t_i) = a_i(t_i) \quad (7.5.3)$$

$$\dot{S}_i(t_i) = \dot{a}_i(t_i) \quad (7.5.4)$$

式 (7.5.2), (7.5.3) に  $i = 0, 1$  を代入すると, それぞれ

$$a_0 = A_0 \quad (7.5.5)$$

$$a_1 = A_0 + A_1 \Delta t + A_2 \Delta t^2 + A_3 \Delta t^3 \quad (7.5.6)$$

式 (7.5.2), (7.5.4) に  $i = 0, 1$  を代入すると, それぞれ

$$\dot{a}_0 = A_1 \quad (7.5.7)$$

$$\dot{a}_1 = A_1 + 2A_2\Delta t + 3A_3\Delta t^2 \quad (7.5.8)$$

となる.

式 (7.5.5), (7.5.6), (7.5.7), (7.5.8) を  $A_0, A_1, A_2, A_3$  について解くと,

$$A_0 = a_0 \quad (7.5.9)$$

$$A_1 = \dot{a}_0 \quad (7.5.10)$$

$$A_2 = \frac{-3(a_0 - a_1) - \Delta t(2\dot{a}_0 + \dot{a}_1)}{\Delta t^2} \quad (7.5.11)$$

$$A_3 = \frac{2(a_0 - a_1) + \Delta t(\dot{a}_0 + \dot{a}_1)}{\Delta t^2} \quad (7.5.12)$$

となる.

また,  $a(t + \Delta t)$  を  $O(\Delta t^3)$  の項までテイラー展開すると

$$a(t + \Delta t) \simeq a(t) + \frac{da(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2a(t)}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3a(t)}{dt^3}\Delta t^3 \quad (7.5.13)$$

となり,  $t = 0$  を代入すると,

$$a(\Delta t) \simeq a_0 + \frac{da_0}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2a_0}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3a_0}{dt^3}\Delta t^3 \quad (7.5.14)$$

よって,

$$\frac{d^2a_0}{dt^2} = 2A_2 = \frac{-6(a_0 - a_1) - \Delta t(4\dot{a}_0 + 2\dot{a}_1)}{\Delta t^2} \quad (7.5.15)$$

$$\frac{d^3a_0}{dt^3} = 6A_3 = \frac{12(a_0 - a_1) + 6\Delta t(\dot{a}_0 + \dot{a}_1)}{\Delta t^3} \quad (7.5.16)$$

## 謝辞

本論文の執筆において、多くの方々にお世話になりました。

指導教員である北海道大学 倉本圭教授には本研究の主題を決めるところから論文の読み方、数値計算の手法など多岐にわたり熱心にご指導していただきました。倉本教授のお言葉により私の惑星科学への興味はかきたてられ、本研究を心より楽しむことができました。

惑星物理学研究室 博士課程3年の福井隆氏には、多忙な中本論文の校閲を快く引き受けてくださり、助言をくださいました。

同大学の惑星宇宙グループの皆様には、様々な助言や激励をいただき、支えていただきました。

以上の皆様に、この場をお借りして深く感謝の意を表します。

## 参考文献

- Baliunas, S., D. Sokoloff, and W. Soon 1996. Magnetic Field and Rotation in Lower Main-Sequence Stars: an Empirical Time-dependent Magnetic Bode's Relation?. *Astrophysical Journal Letters*. 457. L99
- Bouvier, J., S. Cabrit, M. Fernandez, E. L. Martin, and J. M. Matthews 1993. Coyotes-I - the Photometric Variability and Rotational Evolution of T-Tauri Stars. *Astronomy and Astrophysics*. 272. 176
- Chambers, J. E., G. W. Wetherill, and A. P. Boss 1996. The Stability of Multi-Planet Systems. *Icarus*. 119. 261-268
- Chatterjee, S., E. B. Ford, S. Matsumura, and F. A. Rasio 2008. Dynamical Outcomes of Planet-Planet Scattering. *The Astrophysical Journal*. 686. 1. 580-602
- Lanza, A. F. 2010. Hot Jupiters and the evolution of stellar angular momentum. *Astronomy and Astrophysics*. 512. A77
- Lin, D. N. C, P. Bodenheimer, and D. C. Richardson 1996. Orbital migration of the planetary companion of 51 Pegasi to its present location. *Nature*. 380. 6575. 606-607
- Mamajek, E. E., and L. A. Hillenbrand 2008. Improved Age Estimation for Solar-Type Dwarfs Using Activity-Rotation Diagnostics. *The Astrophysical Journal*. 687. 2. 1264-1293
- Marcy, G. W., R. P. Butler, E. Williams, L. Bildsten, J. R. Graham, A. M. Ghez, and J. G. Jernigan 1997. The Planet around 51 Pegasi. *Astrophysical Journal*. 481. 926
- Marzari, F., and S. J. Weidenschilling 2002. Eccentric Extrasolar Planets: The Jumping Jupiter Model. *Icarus*. 156. 570-579
- Nagasawa, M., S. Ida, and T. Bessho 2008. Formation Of Hot Planets By A Combination Of Planet Scattering, Tidal Circularization, And The Kozai Mechanism. *The Astrophysical Journal*. 678. 498-508
- Noyes, R. W., L. W. Hartmann, S. L. Baliunas, D. K. Duncan, and A. H. Vaughan 1984. Rotation, convection, and magnetic activity in lower main-sequence stars. *Astrophysical Journal*. 279. 763-777
- Rasio, F. A., and E. B. Ford 1996. Dynamical instabilities and the formation of extrasolar planetary systems. *Science*. 274. 954-956



- Schilling, G. 1996. ‘ Hot Jupiters’ Leave Theorists in the Cold. *Science*. 273. 5274. 429
- Weidenschilling, S. J., and F. Marzari 1996. Gravitational scattering as a possible origin for giant planets at small stellar distances. *Nature*. 384. 6610. 619-621
- 井田茂 2007. 系外惑星. 東京大学出版
- 井田茂 2003. 異形の惑星. 日本放送出版協会
- 小久保英一郎, 牧野淳一郎, 泰地真弘人 1993. エルミート積分法による重力多体問題専用計算機 HARP - 1. 情報処理学会 研究報告 - ハイパフォーマンスコンピューティング (HPC). Vol 1993. No 72
- Jean Schneider 2011. The Extrasolar Planets Encyclopaedia.  
<http://exoplanet.eu/>
- National Space Science Data Center.  
<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/>
- 東京大学教養学部 2007 年度冬学期 宇宙科学 II (海老沢) 第 10 回 講義ノート  
<http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2007UnivTokyo.html>