

Showman and Polvani (2010) の方程式系

ここでは, Showman and Polvani (2010) で用いられたモデルの定式化を行う.

1 方程式系

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u} = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u} - g' \nabla_z h + \mathbf{R}_u - \frac{\mathbf{u}}{\tau_{drag}} - \mathbf{D}_u, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = S - \frac{h - H}{\tau_{rad}} + F_\nu \equiv Q - D_h. \quad (1.2)$$

それぞれの式をラグランジュ微分で書くのなら

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + g' \nabla h + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u}}{\tau_{drag}} - \mathbf{D}_u, \quad (1.3)$$

$$\frac{dh}{dt} = -h(\nabla \cdot \mathbf{u}) + Q - D_h. \quad (1.4)$$

ここで, D は数値粘性項, h は上層の厚さ, H は上層の平均厚さ, g' は低減重力加速度, S は質量のソースとシンク, τ_{drag} は摩擦時定数, τ_{rad} は放射時定数, \mathbf{R} は下層から上層への運動量移流を表す. S は

$$S = S_0 \cos(m\lambda) \exp \left[- \left(\frac{\phi}{\Delta\phi} \right)^2 \right], \quad (1.5)$$

であり, S_0 は強制振幅, m は強制の東西波数, $\Delta\phi$ は緯度方向の半値幅を示す. R は

$$\mathbf{R}(\lambda, \phi, t) = \begin{cases} -\frac{Q\mathbf{u}}{h}, & Q > 0 \\ 0, & Q \leq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

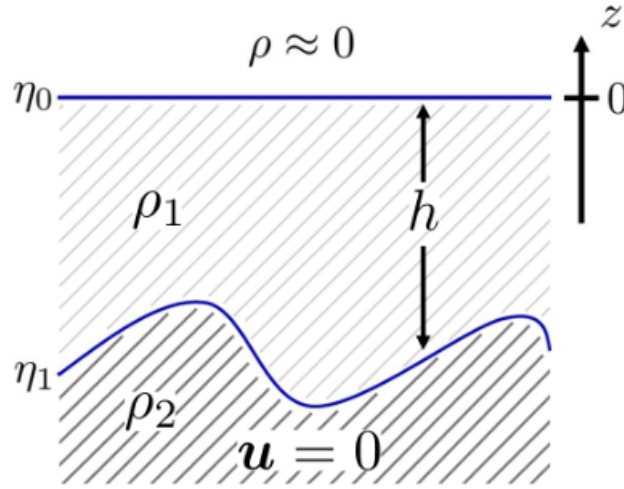


図 3: 1.5 層浅水系の概念図 (Vallis (2017) の図 3.3 を改変). 活動的な上層 (薄い灰色) と深く静止した下層 (濃い灰色) から成る. 上層上端には剛体蓋が課されており, よって $\eta_0 = 0$ である. ここで η_0 と η_1 はそれぞれ上層上端と下層上端の高度を示し, よって上層における流体層の厚さは $h = \eta_0 - \eta_1$ である.

図 1: (藤林凜 修士論文より引用)

2 渦度発散型

ここでは, 上記の方程式の球面渦度発散型を求める. 1 層浅水モデルの方程式¹を参考に渦度発散型に書きかえると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & -\frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)u] - \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(\zeta + f)v \cos \vartheta] \\ & + \nabla \times \mathbf{R} - \frac{\zeta}{\tau_{drag}} - K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] \zeta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} = & \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)v] - \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(\zeta + f)u \cos \vartheta] \\ & - \nabla^2 [g'h + E] + \nabla \cdot \mathbf{R} - \frac{D}{\tau_{drag}} - K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] D, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} (hu) - \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (hv \cos \vartheta) + S - \frac{h - H}{\tau_{rad}} - (-1)^{N_h} K_h \nabla^{2N_h} h. \quad (2.9)$$

¹http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/rsuzuki/research/williamson/tex/shallow_eq_onelayer.pdf

ここで, $E = (u^2 + v^2)/2$, K_m は超粘性係数, K_h は超拡散係数である。
 $U = u \cos \vartheta, V = v \cos \vartheta$ と $\mu = \sin \vartheta$ を用い, サイン緯度に書きかえると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)U] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)V] \\ & + \nabla \times \mathbf{R} - \frac{\zeta}{\tau_{drag}} - K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] \zeta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} = & \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)V] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)U] \\ & - \nabla^2 [g'h + E] + \nabla \cdot \mathbf{R} - \frac{D}{\tau_{drag}} - K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] D, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (hU) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (hV) + S - \frac{h-H}{\tau_{rad}} - (-1)^{N_h} K_h \nabla^{2N_h} h. \quad (2.12)$$

また, 上層の厚さ h を上層の厚さの平均場 H とそこからのずれ h' を用いて, $h = h'(\lambda, \phi, t) + H$ と書くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)U] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)V] \\ & + \nabla \times \mathbf{R} - \frac{\zeta}{\tau_{drag}} - K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] \zeta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} = & \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)V] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)U] \\ & - \nabla^2 [g'h' + E] + \nabla \cdot \mathbf{R} - \frac{D}{\tau_{drag}} - K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] D, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (h'U) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (h'V) - HD + S - \frac{h'}{\tau_{rad}} - (-1)^{N_h} K_h \nabla^{2N_h} h. \quad (2.15)$$

ここで,

$$\nabla \times \mathbf{R} = \begin{cases} -\frac{Q\zeta}{h}, & Q > 0 \\ 0, & Q \leq 0. \end{cases} \quad \nabla \cdot \mathbf{R} = \begin{cases} -\frac{QD}{h}, & Q > 0 \\ 0, & Q \leq 0. \end{cases} \quad (2.16)$$