

## 1 層浅水モデルの方程式

ここでは, Vallis, 2017<sup>1</sup>を参考に, 1層浅水モデルの方程式を導出する.

### 1 1層浅水モデルの概要

浅水系では流れの水平スケールが層の厚さに比べ, かなり大きく, 密度が一定の流体層を考える. 水平流速や圧力変化は深さによらず, 静水圧近似がなりたつと考える. 具体的には図1に示すような流体層である. ここで,  $h$ は流体層の厚さ,  $H$ は流体層の平均の厚さ,  $\eta$ は自由表面の高さ,  $\eta_b$ は下部剛体境界の高さである.  $z=0$ の基準面のとりかたは任意であるが, 典型的には  $\eta_b$ の高さの平均が0になる面を用いる.  $\Delta\eta$ は自由表面平均からのずれである. すなわち,  $\eta = \eta_b + h = H + \Delta\eta$ である<sup>2</sup>.

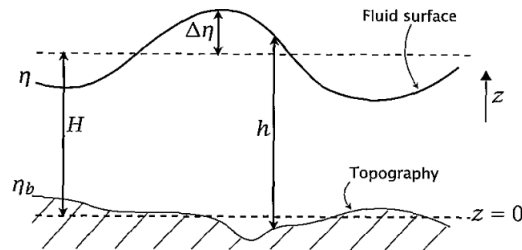


Fig. 3.1 A shallow water system.  $h$  is the thickness of a water column,  $H$  its mean thickness,  $\eta$  the height of the free surface and  $\eta_b$  is the height of the lower, rigid, surface, above some arbitrary origin, typically chosen such that the average of  $\eta_b$  is zero.  $\Delta\eta$  is the deviation free surface height, so we have  $\eta = \eta_b + h = H + \Delta\eta$ .

図 1: 1層浅水方程式系の模式図

<sup>1</sup>Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, 2nd edition. 第3章 浅水方程式系と等エントロピー座標 Cambridge University Press.

<sup>2</sup>Williamson et al. (1992) では  $h \rightarrow h^*$ ,  $\eta \rightarrow h$ ,  $\eta_b \rightarrow h_s$  と表記しているが, ここでは Vallis の表記に従う.

## 2 運動量の式

鉛直方向の運動量の式は静水圧平衡の式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.1)$$

である。(2.1)を $z$ について積分すると、密度一定より

$$p(x, y, z, t) = -\rho g z + p_0. \quad (2.2)$$

流体の上端 $z = \eta$ での圧力は上部にのっている流体の重さで定まる。考えている層の上にある流体の密度は無視できると考えれば、 $z = \eta$ で $p = 0$ である。すなわち、(2.2)は

$$p(x, y, z, t) = \rho g(\eta(x, y, t) - z). \quad (2.3)$$

(2.3)より、水平圧力勾配は高さに依存しないことがわかる。すなわち

$$\nabla_z p = \rho g \nabla_z \eta, \quad (2.4)$$

$$\nabla_z = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.5)$$

回転の効果を含む非粘性流体の運動量の式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla_z p. \quad (2.6)$$

ここで、 $\mathbf{k}$ は $z$ 方向の単位ベクトルである。(2.6)に(2.4)を代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u} - g \nabla_z \eta \quad (2.7)$$

となる。これは Williamson et al. (1992) の(8)式と一致する。

## 3 連続の式

図2のように高さ $h$ 、断面積 $A$ の流体柱に含まれる質量は

$$\int_A \rho h dA. \quad (3.1)$$

移流によって、流体柱に流体が出入りする場合、そのフラックスは流体柱の質量変化と等しくなければならない。浅水系の場合、流体の密度は定数なので、流体

Fig. 3.2 The mass budget for a column of area  $A$  in a shallow water system. The fluid leaving the column is  $\oint \rho \mathbf{h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl$  where  $\mathbf{n}$  is the unit vector normal to the boundary of the fluid column. There is a non-zero vertical velocity at the top of the column if the mass convergence into the column is non-zero.

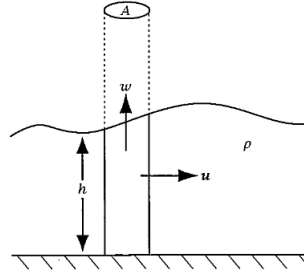


図 2: 1 層浅水方程式系において, 流体中に含まれる質量の模式図

柱の質量が増加するという事は流体柱の高さが増加する. 流体柱への質量の流入は

$$F_m = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.2)$$

ここで,  $S$  は流体柱の鉛直境界領域である. 流体柱の表面領域は  $h \mathbf{n} \delta l$  の面積要素で構成される.  $\delta l$  は円柱を囲む線要素,  $\mathbf{n}$  は境界に垂直な単位ベクトルであり, 領域の外側を向いている<sup>3</sup>. 面積要素を導入すると (3.2) は

$$F_m = - \oint \rho \mathbf{h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl. \quad (3.3)$$

2次元のガウスの発散定理より

$$F_m = - \int_A \nabla \cdot (\rho \mathbf{h} \mathbf{u}) dA \quad (3.4)$$

となる. ここで  $A$  は流体柱の底面の面積である. 流体柱の質量変化は

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{d}{dt} \int \rho dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_A \rho h dA \\ &= \int_A \rho \frac{\partial h}{\partial t} dA. \end{aligned} \quad (3.5)$$

密度が一定で (3.4) と (3.5) が等しいため

$$\int_A \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{h} \mathbf{u}) \right] dA = 0. \quad (3.6)$$

積分領域は任意であるため, 被積分関数は 0 にならなければならない. よって

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{h} \mathbf{u}) = 0. \quad (3.7)$$

<sup>3</sup>流体柱から流体が出ることを正にとるため, フラックスにはマイナスがつく.

$$\cdot \text{運動量の式} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u} - g \nabla_z \eta \quad (2.7)$$

$$\cdot \text{連続の式} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0. \quad (3.7)$$

## 4 渦度発散型への変形

Williamson et al. (1992) を参考に，運動量の式と連続の式を渦度と発散を用いた形に書きかえる．図 3 に示す球座標系ではデカルト座標で表された点からの微小な座標変化  $(\delta x, \delta y)$  が  $(r \cos \vartheta \delta \lambda, r \delta \vartheta)$  で書かれる<sup>4</sup>．物質微分，発散，勾配，回転は以下のように書かれる．

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{a \cos \vartheta} \left[ \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (A_\vartheta \cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right], \quad (4.9)$$

$$\nabla \phi = \frac{\mathbf{i}}{a \cos \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{j}}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad (4.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{i} r \cos \vartheta & \mathbf{j} r & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial r} \\ A_\lambda r \cos \vartheta & A_\vartheta r & A_r \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

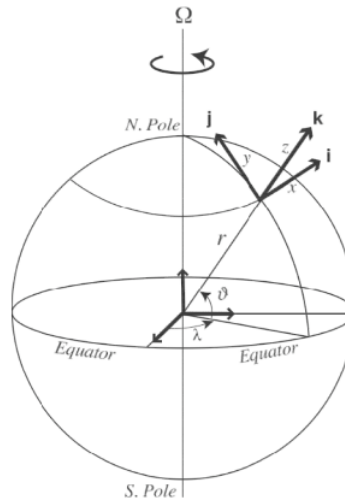


Fig. 2.3 The spherical coordinate system. The orthogonal unit vectors  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  and  $\mathbf{k}$  point in the direction of increasing longitude  $\lambda$ , latitude  $\vartheta$ , and altitude  $z$ . Locally, one may apply a Cartesian system with variables  $x$ ,  $y$  and  $z$  measuring distances along  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  and  $\mathbf{k}$ .

図 2.3: 球座標系の模式図. 直交単位ベクトル  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  の方向はそれぞれ経度  $\lambda$ , 緯度  $\vartheta$ , 高度  $z$  の増加する方向にとる.  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  の方向に沿って  $x, y, z$  軸をとることで, 局部的にデカルト座標系を置くことができる.

図 3: 球座標系

<sup>4</sup>図 3 では  $z$  方向にも次元を持つが, 浅水系の場合, 運動の鉛直のスケールはかなり小さいと近似しているため, 2次元で考えられる.

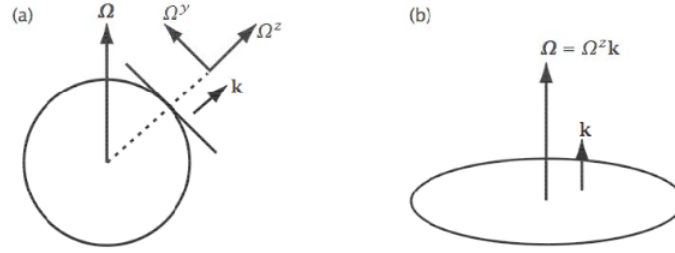


Fig. 2.4 (a) On the sphere the rotation vector  $\Omega$  can be decomposed into two components, one in the local vertical and one in the local horizontal, pointing toward the pole. That is,  $\Omega = \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}$  where  $\Omega_y = \Omega \cos \vartheta$  and  $\Omega_z = \Omega \sin \vartheta$ . In geophysical fluid dynamics, the rotation vector in the local vertical is often the more important component in the horizontal momentum equations. On a rotating disk, (b), the rotation vector  $\Omega$  is parallel to the local vertical  $\mathbf{k}$ .

図 2.4: (a) 自転角速度ベクトル  $\Omega$  は球面上で 2 つの成分に分解される。1 つは接平面に直交する成分で、もう 1 つは接平面に平行で極向きの成分である。これを式で表すと  $\Omega = \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}$  となる。ここで  $\Omega_y = \Omega \cos \vartheta$ ,  $\Omega_z = \Omega \sin \vartheta$  である。地球流体力学においては、水平方向の運動方程式を考察する際に  $\Omega_z \mathbf{k}$  がより重要となる。(b) 回転する円盤の模式図。角速度ベクトル  $\Omega$  は法線ベクトル  $\mathbf{k}$  と平行である。

図 4: 自転角速度ベクトル

また、局所デカルト座標系では図 4 のように自転角速度ベクトルと座標軸が一致していない為、自転角速度ベクトルは以下のように 2 成分に分けられる。

$$\Omega = \Omega(\mathbf{j} \cos \vartheta + \mathbf{k} \sin \vartheta). \quad (4.12)$$

さらに、単位ベクトル自体も場所に応じて、変化する為、その効果も加えないといけない。物質微分に対する単位ベクトルの変化は

$$\frac{D\mathbf{i}}{Dt} = \frac{u}{r \cos \vartheta} (\mathbf{j} \sin \vartheta - \mathbf{k} \cos \vartheta), \quad (4.13)$$

$$\frac{D\mathbf{j}}{Dt} = -\mathbf{i} \frac{u}{r} \tan \vartheta - \mathbf{k} \frac{v}{r}, \quad (4.14)$$

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = \mathbf{i} \frac{u}{r} + \mathbf{j} \frac{v}{r} \quad (4.15)$$

単位ベクトルの変化と自転角速度ベクトルをまとめたコリオリ項は

$$u \text{ 成分} = \left( f + \frac{u}{a} \tan \vartheta \right) hv \quad (4.16)$$

$$v \text{ 成分} = - \left( f + \frac{u}{a} \tan \vartheta \right) hu \quad (4.17)$$

となる<sup>5</sup>. ここで  $w = 0$  をもちいた<sup>6</sup>. (4.10), (4.16), (4.17) を用い, (2.7), (3.7) を書きかえると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u - \left(f + \frac{u}{a} \tan \vartheta\right)v + \frac{g}{a \cos \vartheta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)v + \left(f + \frac{u}{a} \tan \vartheta\right)u + \frac{g}{a} \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)h + \frac{h}{a \cos \vartheta} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \vartheta}{\partial \vartheta}\right) = 0. \quad (4.20)$$

渦度  $\zeta$  と発散  $D$  は (4.11), (4.9) より

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{a \cos \vartheta} \left[ \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u \cos \vartheta}{\partial \vartheta} \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} D &\equiv \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{a \cos \vartheta} \left[ \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{\partial u \cos \vartheta}{\partial \vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

ベクトル公式

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{u} \quad (4.23)$$

をベクトル形式で書かれた (2.7) に用いると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\zeta + f)\mathbf{k} \times \mathbf{u} - \nabla_z \left( g\eta + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right). \quad (4.24)$$

(4.24) に  $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$  と  $\nabla \cdot$  を作用させたものをかくと

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\zeta + f)\mathbf{u}, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times (\zeta + f)\mathbf{u} - \nabla^2 \left( g\eta + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) \quad (4.26)$$

<sup>5</sup>詳しい導出は Williamson et al. (1992) 読書ノート 付録 A を参照.

<sup>6</sup> $w$  を含む形など詳しい部分については Vallis 2.2.2 節を参照.

である<sup>7</sup>. (4.9), (4.11) をもちいて, 書きなおせば

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)u] - \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(\zeta + f)v \cos \vartheta], \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)v] - \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(\zeta + f)u \cos \vartheta] \\ &\quad - \nabla^2 \left[ g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここで,  $\nabla^2$  は

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (4.29)$$

である.

---

<sup>7</sup>(4.24) の右辺第 1 項に回転演算子を作用させると

$$\begin{aligned} -\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times [(\zeta + f)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}] &= -\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \left[ (\zeta + f) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right] \\ &= -\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \left[ (\zeta + f) \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= -\hat{\mathbf{k}} \cdot \left[ (\zeta + f) \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial z} \\ -\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right] \\ &= -\nabla \cdot (\zeta + f)\mathbf{v}. \end{aligned}$$

また, 発散演算子を作用させると

$$-\nabla \cdot [(\zeta + f)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}] = \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times (\zeta + f)\mathbf{v}.$$

ここで, ベクトル公式  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$  を用いた.