

非等質量連星原始ブラックホール の形成シミュレーション

弘前大学 理工学部 物理科学科
鈴木綾馬

2019年3月22日

概要

2015年9月14日、アメリカのレーザー干渉計重力波天文台（LIGO）によって人類初の重力波の検出がなされた。重力波とは1916年にアインシュタインが発表した一般相対性理論から予言される波で、時空の歪みが波動として光速で伝播する現象である。アインシュタインの予言から約100年、重力波の直接検出は大変なニュースになり、2017年のノーベル物理学賞ではこれに貢献したとして、Rainer Weiss, Barry C. Barish, Kip S. Thorneの3人が受賞している。

しかし、さらに研究者を驚かせたのは重力波源が太陽質量の約30倍同士のブラックホール（BH）の合体によるものだという事だった。最初のイベント後もLIGOとイタリアにある同様の検出器、Virgoにより重力波の検出が行われ、重たいBHの合体による重力波が検出されている。その結果、今までの電磁波観測で発見されていたBHの推定質量は太陽質量の数倍～15倍程度であったが、重力波観測によって宇宙には我々の想像以上に重たいBHが多数存在している事がわかった。

この太陽質量の約30倍のBHの起源は何かという事が問題になっている。候補としては宇宙初期に形成された原始ブラックホール（PBH）、恒星質量同士のBHの合体の繰り返し、低金属量星から形成されるBHが考えられている。本研究では、この中のPBHに焦点を当てた。PBHは暗黒物質の候補でもあり、様々な分野で重要な研究対象になっている。

PBHは宇宙初期に連星を形成し、その連星は重力波放出によるエネルギー減少に伴い軌道を縮め、最終的に合体する。PBHが作る連星の長半径、離心率がわかれば合体時間は一般相対論によって一意的に決まる為、PBHの空間的な分布、質量に関する分布の情報から合体数の確率分布が得られ、それをLIGOなどの検出器の観測結果と見比べれば、PBHの存在を検証する為の良い手段になり得る。

PBHが2つしかなければ、お互いの重力によって正面衝突してしまうが、3体目のPBHが存在すれば、それからの潮汐力によって連星を形成する。PBH連星のパラメーターや合体率などについては、1997年に中村らが同質量のPBHを3つ考え、議論した。この中で、連星の形を考える際に必要な比例係数 α , β を中村らは、計算の簡略化の為、それぞれ1にした。 α , β はいずれも連星の軌道を指定するパラメーターであり、これらが1から大きくずれると、合体率などの観測に密接した量の推定に影響する。1998年には井岡らが同質量PBHの場合について数値計算を行い、 $\alpha \approx 0.4$, $\beta \approx 0.8$ を求めた。しかし、PBHは宇宙初期の密度揺らぎから生じ、形成されるPBHの質量というのは形成時刻に依存する為、全てのPBHが同質量とは考えにくい。

本研究では非等質量のPBHの場合の比例係数、 α , β について、数値計算を用いて考え、解析的に考察を行った。その結果、 α , β がPBHの質量や潮汐力を与える3体目のPBHの角度によって変化が見られる事がわかった。本研究の成果は、一般的な状況でのPBH合体率の精密な計算に役立つべきものであり、今後、重力波源のBHの正体解明にも貢献するだろう。

目次

第 1 章	序論	1
1.1	原始ブラックホール	1
1.2	密度揺らぎとインフレーション	1
1.3	ダークマター	2
第 2 章	連星の形成とパラメーター	3
2.1	連星の形成	3
2.2	長半径・短半径	5
2.3	運動方程式	6
2.4	等質量 PBH の場合の数値計算	8
2.5	非等質量 PBH の場合の数値計算	10
2.6	α, β に関する考察	11
2.6.1	α	11
2.6.2	β	13
第 3 章	結論	16
付録 A	長半径・短半径	18
付録 B	ニュートン近似	21
付録 C	数値積分法	23
付録 D	数値計算の信頼性	27
参考文献		29

第 1 章

序論

1.1 原始ブラックホール

原始ブラックホール (Primordial Black Hole; PBH) はビッグバン直後で宇宙がまだ超高密度の状態である放射優勢期に、宇宙にある物質が重力崩壊して形成したブラックホール (Black Hole; BH) である。PBH の形成する機構については、Zel'dovich と Novikov [1] や Hawking [2] によって提唱された、大きな密度揺らぎを持った領域が重力崩壊して BH になる可能性が有力視されている。

宇宙初期に様々な密度揺らぎが存在しているとする。密度の高いところと低いところがあり、その揺らぎのサイズを波長と呼ぶ。宇宙の地平線長 l はおおよそ、光速と宇宙のビッグバンから計った時間 t の積でかける: $l \approx ct$ 。これは宇宙の時間の経過と共に大きくなる。最初、密度揺らぎの波長は地平線長より大きいですが、十分時間が経過すると、地平線長の内部に入る。この時、地平線長の内部で物質の重力が、その時の宇宙の放射の圧力勾配より大きければ、その地平線長の内部で重力崩壊が起き、BH が生成する。この時出来る BH の質量は地平線長内にあるエネルギーとほぼ等しくなる為、形成する時間によって出来る BH の質量は変わってくる。PBH の質量 M_{PBH} は次のように書ける [3, 4]:

$$M_{\text{PBH}} \approx 30M_{\odot} \left(\frac{t}{1\text{ms}} \right). \quad (1.1)$$

ここで t はビッグバンから計った時刻、1ms は 10^{-3}s 、 $M_{\odot} = 2 \times 10^{33}\text{g}$ は太陽質量を表す。

このように PBH は形成する時期によって様々な質量を持つ事になる。

1.2 密度揺らぎとインフレーション

そもそも、PBH を形成するような密度揺らぎはどのように出来るのか。実際に宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background; CMB) によって宇宙の非等方性、つまり宇宙初期に揺らぎが存在したことが欧州宇宙機関が中心になって打ち上げた Planck 衛星によって観測されている。この揺らぎはインフレーションと呼ばれる宇宙誕生後約 10^{-36} 秒に起こった宇宙の加速膨

張によって作られたと考えられている。

インフレーションはインフラトンと呼ばれるスカラー場のポテンシャルエネルギーが宇宙を支配する事によって起きる。インフラトンは波長の小さい量子ゆらぎと呼ばれるものを持っているが、それが急激な宇宙の膨張により引き伸ばされる事によって宇宙論的スケールの長さを持った揺らぎとなる。しかし、標準的なインフレーションが作る揺らぎでは PBH を形成する密度揺らぎには至らず、CMB で観測されるような振幅より、さらに大きな揺らぎが必要になる。これを説明する為、ダブルインフレーションモデルといった、宇宙の初期で 2 段階のインフレーションが起きるモデルなどが考えられている。もし、PBH の存在を検証出来れば、それだけで初期の宇宙モデルに制限が出来る為、PBH の存在について考える事はとても重要であり、世界中の研究者が考えているテーマである。

1.3 ダークマター

ダークマター (Dark Matter; DM) とは、質量を持ち重力作用はするが、光学的には観測できないとされる物質のことである。通常、銀河は中心から距離が離れる程、密度が低くなり、回転速度は低下するはずであるが、実際には低下していないことが観測からわかっている。この問題を銀河の回転曲線問題と言うが、これは光学的な観測では見えない、しかし質量を持つ未知の物質ダークマターの存在を仮定する事により解決できる。他にも、重たい物質があると光が曲げられてしまう重力レンズ効果の観測などからも、DM の存在を示す証拠が得られている。割合としては宇宙にある物質の約 4 分の 1 を占めていると考えられている。我々に馴染み深い原子は約 5% である (図 1.1)[5]。

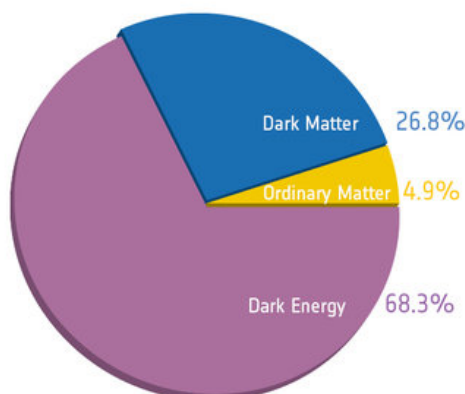


図 1.1 宇宙の物質割合 ([4] より引用)。

第 2 章

連星の形成とパラメーター

2.1 連星の形成

PBH が初期の宇宙空間に分布していたとする。これらの PBH は最初、宇宙膨張の効果により互いに離れていくが、ある程度の時間が経つと連星を組むような初期位置に存在していた PBH 同士は互いの重力によって近付き始める。この近付き始める PBH2 つしか考慮しなければ、互いの重力によって正面衝突してしまう (図 2.1 左)。しかし、周りにそれらの PBH に潮汐力を与える PBH や物質が存在していれば PBH は互いに楕円運動をする連星を形成する (図 2.1 右)。一旦、連星が形成されると、それらは重力波放射によってエネルギーを失い、軌道が縮んでいく。最終的には LIGO で観測されるような重力波を放出して合体し 1 つの BH になる。合体時間 t は一般相対論によって一意的に以下のように求める事が出来る。ここで G は重力定数、 M_{PBH} は PBH の質量、 c は光速、 e は離心率、 a は長半径を表す [6, 7]:

$$t = \frac{3}{170} \frac{c^5}{(GM_{\text{PBH}})^3} (1 - e^2)^{7/2} a^4. \quad (2.1)$$

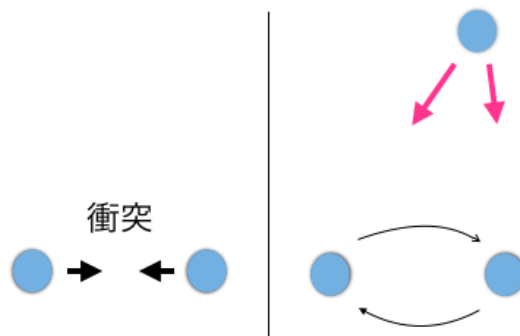


図 2.1 連星の形成。

(2.1) 式を見ると、PBH の質量と出来る連星の長半径・離心率を求める事が出来れば合体時間がわかる。さらに言えば、宇宙初期の PBH の存在量 (これは宇宙に存在する DM の内、PBH がどれくらいの割合を占めているかによって決める事が出来る) を決め、それらが形成する連星の長半径・離心率の確率分布が分かれば、合体時間の分布がわかる為、LIGO で観測されるイベント数と比較する事で PBH の存在を検証する事が出来る。実際に佐々木らによると、宇宙に存在する DM の内、PBH が 0.1% であれば LIGO の観測のイベント数を説明出来る事が示されている (図 2.2)[8]。0.1% というのは少ないと感じるかもしれないが、我々のいる天の川銀河の中に約 3000 万個の PBH が存在する事に相当する。

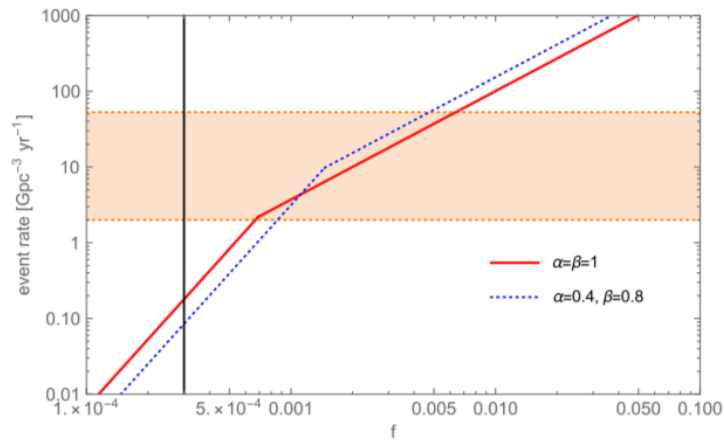


図 2.2 LIGO イベント数と f ([8] より引用).
黒線は CMB からの制限による PBH の存在量の下限である。

f は DM の内、PBH がどれくらいの割合かを表し、それらの密度パラメーター Ω を用いて (2.2) 式のように表す:

$$f \equiv \frac{\Omega_{\text{PBH}}}{\Omega_{\text{DM}}}. \quad (2.2)$$

(2.1) 式の合体時間 t を LIGO で見つかった BH 合体のイベントの時刻、つまり現在の宇宙年齢 138 億年に固定する。連星を組む PBH は宇宙膨張の効果にそれらの重力の効果が増えないといけない為、それらの組む連星の長半径には最大値が存在する。この最大値を超えてしまえば、それらが近付き連星を形成する事はない。また、この時点で離心率にも上限が付く。潮汐力を与える PBH と連星を組む PBH の距離が遠くなればなる程、離心率は大きくなるが、その距離は f が小さくなればなる程、遠くなる。ちょうど f が 0.0007 あたりで離心率が上限に近付き、イベント数に制限がかかる為、図 2.2 のような線の折れ曲りが生じる。図 2.2 の α や β は次節で詳しく述べる。

2.2 長半径・短半径

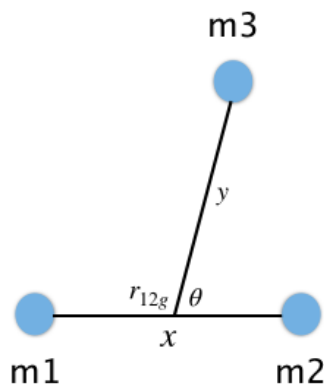


図 2.3 PBH の位置設定。

PBH 連星の形成に関しては、1997 年に中村ら、1998 年に井岡らによって議論されている [10, 11]。状況としては図 2.3 のように PBH を 3 体考える。これより $f = 1$ とし、 m_1 と m_2 が連星を組み m_3 が潮汐力を与える PBH と考える。また m_1 と m_2 の間の距離を x , m_1 と m_2 の重心 r_{12g} から角度 θ の方向に位置する m_3 までの距離を y とする。 x, y は共動座標 (宇宙膨張と共に座標間隔が伸びる座標) である。

この時、出来る m_1 と m_2 の連星の長半径 a と短半径 b は比例係数 α と β , PBH の質量, x, y , また m_1 と m_2 が宇宙膨張から切り離される時のスケール因子 R_{dc} を用いて以下のように書ける (付録 A):

$$a = \alpha x R_{dc}, \quad b = \beta \frac{2m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{x}{y}\right)^3 a. \quad (2.3)$$

$m_1 = m_2 = m_3$ の等質量 PBH の場合、PBH のエネルギー密度 ρ_{BH} 、放射のエネルギー密度 ρ_r は等密度時のエネルギー密度 ρ_{eq} を用いて (2.4) 式のように書ける:

$$\rho_{BH} = \rho_{eq} \left(\frac{\bar{x}}{xR}\right)^3, \quad \rho_r = \rho_{eq} \left(\frac{1}{R^4}\right). \quad (2.4)$$

ここで \bar{x} は等密度時の PBH の平均間隔を表し、 $\bar{x} = (M_{PBH}/\rho_{eq})^{1/3}$ で書ける。初期位置でこれより x が大きければ連星を形成しない為、 $0 < \frac{x}{\bar{x}} < 1$ である。 R_{dc} は ρ_{BH} と ρ_r がつり合った時のスケール因子なので (2.5) 式で書ける:

$$R_{dc} = \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^3. \quad (2.5)$$

さらに (2.4) 式から (2.6) 式が得られる:

$$\frac{a}{x} = \alpha \left(\frac{x}{x} \right)^4, \quad \frac{b}{a} = \beta \left(\frac{x}{y} \right)^3. \quad (2.6)$$

中村らは比例係数 α, β が $O(1)$ の量だとし、シンプルにする為、 $\alpha = \beta = 1$ とし、連星の合体率などを議論した。井岡らは数値計算を行って、 α, β を見積もり、同質量 PBH の場合の比例係数を $\alpha \approx 0.4, \beta \approx 0.8$ とした。

2.3 運動方程式

具体的に数値計算で解く運動方程式を求める。これより $G = c = 1$ とする。ニュートン近似 (付録 B) により、弱い重力場での計量は重力ポテンシャル ϕ 、スケール因子 R 、PBH の質量 m を用いて次のように書ける:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)R(t)^2 d\mathbf{x}^2, \quad (2.7)$$

$$\phi \equiv - \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{R|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad (i, j = 1 \dots 3). \quad (2.8)$$

さらに (2.7) 式は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)R(t)^2 d\mathbf{x}^2 \\ &= -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)R(t)^2 dt^2 \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 \\ &\simeq [-(1 + 2\phi) + R(t)^2 \dot{\mathbf{x}}^2] dt^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

と近似できる。最後の近似で ϕ と PBH の固有速度 \dot{x} を含む $R\dot{x}$ の積は $|R\dot{x}| \ll 1$ より無視出来る事を用いた。(2.9) 式より

$$\int ds = \int \sqrt{1 + 2\phi - R^2 \dot{\mathbf{x}}^2} dt \simeq \int \left(1 - \frac{1}{2} R^2 \dot{\mathbf{x}}^2 + \phi \right) dt \quad (2.10)$$

となる。(2.10) 式の被積分関数は力学系の Lagrangian に対応するので、Euler-Lagrange 方程式 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$ より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\mathbf{x}}_i) &= -\nabla \phi \\ &= -\frac{1}{R} \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

また、ハッブルパラメーター H は以下のように定義される:

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}. \quad (2.12)$$

等密度時の時刻を t_{eq} とし、その時の値を $R = 1$ と規格化してやれば、放射優勢宇宙では $R \propto t^{1/2}$ なので $R = (t/t_{\text{eq}})^{1/2} \rightarrow t = R^2 t_{\text{eq}}$ となる。これと、(2.12) 式より

$$H = \frac{1}{2t},$$

従って

$$H_{\text{eq}} = \frac{1}{2t_{\text{eq}}}$$

であり、これから

$$H = \frac{H_{\text{eq}}}{R^2} \tag{2.13}$$

となる。これを用いて (2.11) 式の左辺を展開すると、($' = \frac{d}{dR}$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R^2 \dot{\mathbf{x}}) &= HR(R^2 HR\mathbf{x}')' \\ &= HR(H_{\text{eq}}R\mathbf{x}')' \\ &= \frac{H_{\text{eq}}^2}{R}(R\mathbf{x}'' + \mathbf{x}') \\ &= H_{\text{eq}}^2(\mathbf{x}'' + \frac{\mathbf{x}'}{R}) \end{aligned}$$

となる。これにより (2.11) 式は

$$\mathbf{x}_i'' + \frac{1}{R}\mathbf{x}_i' = -\frac{1}{H_{\text{eq}}^2 R} \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \tag{2.14}$$

と書き直される。 $z \equiv \frac{x}{\bar{x}}$ を用いれば、

$$\mathbf{z}_i'' + \frac{1}{R}\mathbf{z}_i' = -\frac{1}{\bar{x}^3 H_{\text{eq}}^2 R} \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)}{|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j|^3} \tag{2.15}$$

となる。

2.4 等質量 PBH の場合の数値計算

(2.15) 式を井岡らは 5 次の Runge–Kutta 法で数値積分し、その結果 (2.6) 式から図 2.4 を描き、 $\alpha \approx 0.4$, $\beta \approx 0.8$ を求めた。

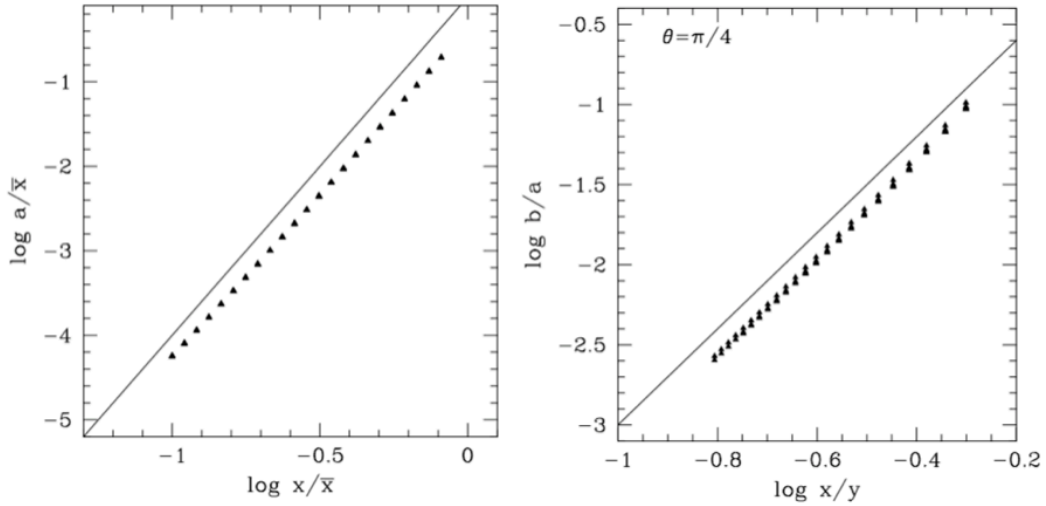


図 2.4 数値計算結果 ([10] より引用)。

我々は井岡らと同じ初期条件で同じ結果が得られるのかを確認するため、自動刻み幅 Runge–Kutta 法 (Runge–Kutta–Fehlberg 法)(付録 C) で同様の計算を行った。図 2.5 は m_1 から見た m_2 , m_3 の相対運動の井岡らとの比較であり、概ね一致している。様々な x と y の組み合わせで a と b を計算しプロットすることで図 2.4 と同様の図 2.6 を描く事が出来、 $\alpha \approx 0.4$, $\beta \approx 0.8$ を求める事が出来た。

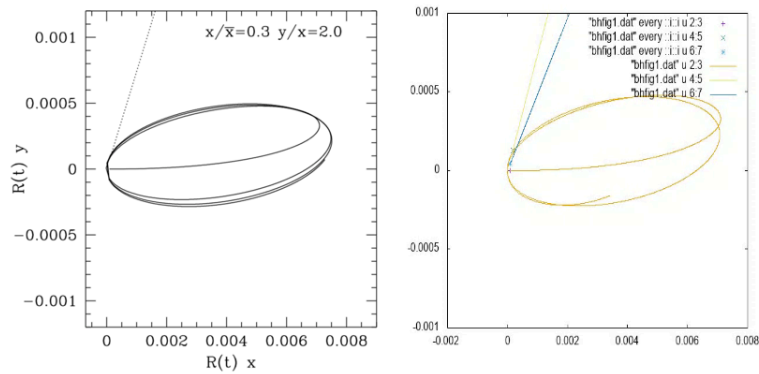


図 2.5 PBH の軌道 (左:[10] より引用)。

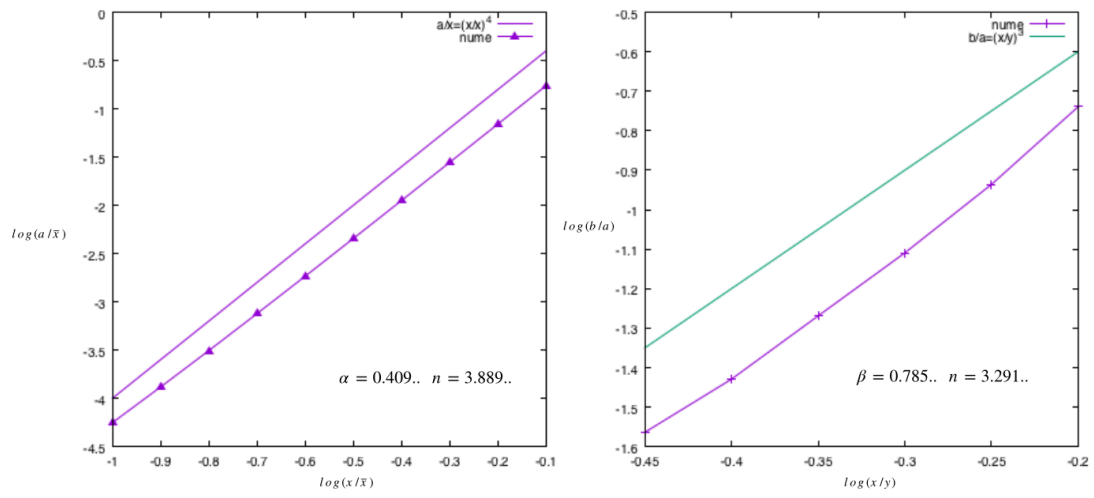


图 2.6 数值计算结果。

2.5 非等質量 PBH の場合の数値計算

ここから本研究の主題となる非等質量 PBH の場合について考えていく。2017 年に Raidal らが発表した論文では非等質量 PBH の合体時間などを解析的に議論している [12]。しかし、この際に用いられている α 、 β はそれぞれ 1 として計算が進められている。より信頼性のある合体時間・合体率を求める為には、非等質量 PBH の場合の α 、 β を求める必要がある。我々は図 2.7 のように PBH の質量と角度を変化させて数値計算を行った。井岡らに倣い、図 2.4 のような図を描き、その結果得られた α 、 β を表 2.1 に示す。

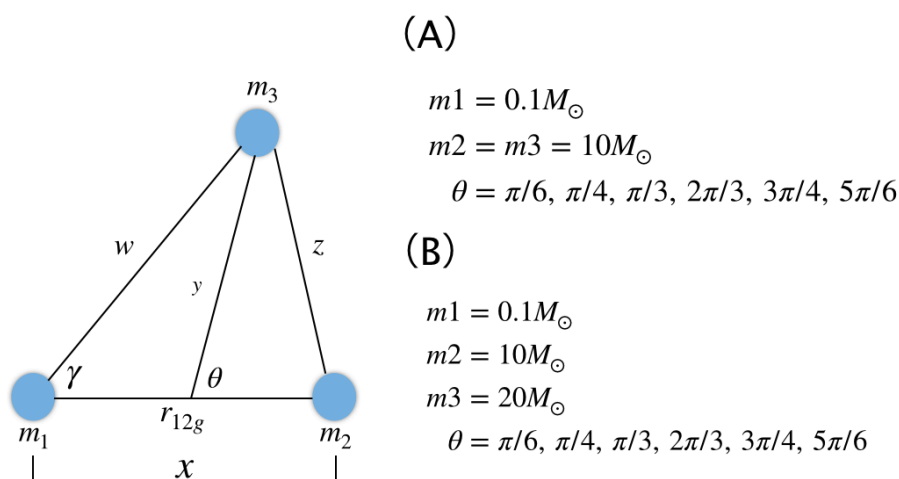


図 2.7 PBH の設定。

表 2.1 α 、 β 数値計算結果。

		$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
A	α	0.4658	0.4639	0.4566	0.4444	0.4572	0.4809
	β	0.4082	0.5182	0.5287	0.5714	0.9063	0.9956
B	α	0.4796	0.4675	0.4588	0.4350	0.4625	0.5176
	β	0.4429	0.5615	0.5720	0.6223	0.9872	1.0814

α については角度によってあまり変化がないが、 β については角度によって最大で約 0.6 の差がある事がわかった。 α 、 β が角度や潮汐力を与える PBH の質量によってどれくらいの変化があるのかを調べる為には、 x, y を固定し ($x = 0.3, y = 0.8$)、角度のみを変化させたときに得られる α 、 β の変化を図 2.8 に示す。横線はそれぞれの平均値である。

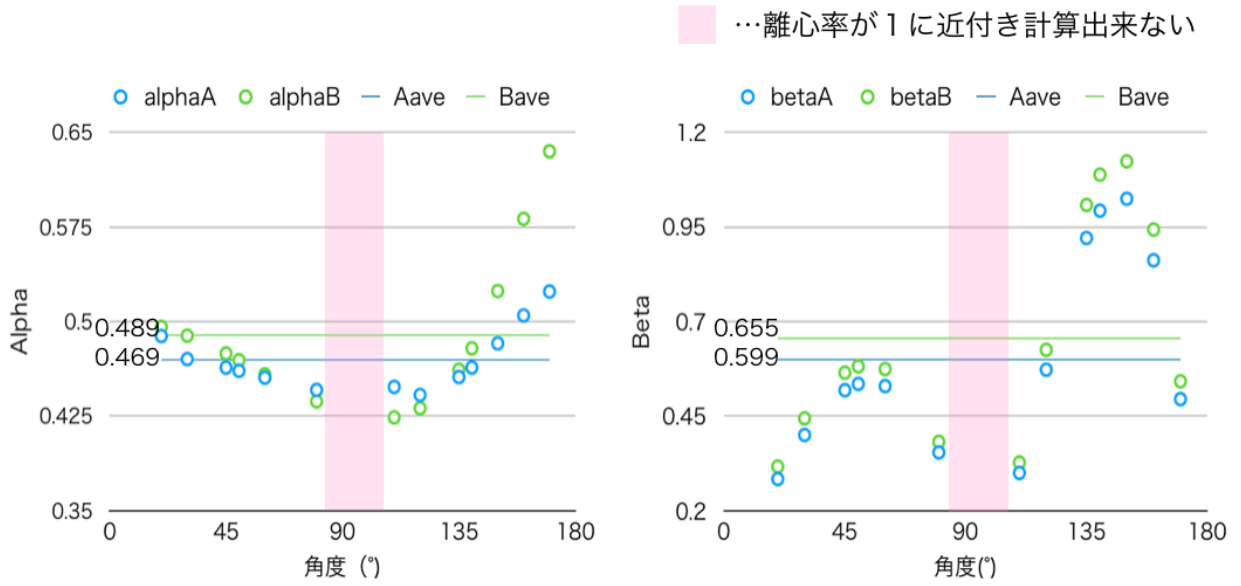


図 2.8 α (左), β (右) の角度による変化。

α は潮汐力を与える m_3 が連星を組む PBH のどちらかに近い時、つまり角度が 0 度 (重い m_2 に近い) や 180 度 (軽い m_1 に近い) に近い時に大きくなる事がわかった。その変化は質量の小さい方に近い時、特に大きくなっている。 β に関しては、潮汐力が連星に対して大きい影響を与える角度がある事がわかった。

2.6 α, β に関する考察

2.6.1 α

α は宇宙膨張から切り離される時のスケール因子 R_{dc} が深く関係していると (2.3) 式から考えられる。連星を組む m_1, m_2 に m_3 が水平方向の潮汐力を及ぼすと、宇宙膨張から切り離される時刻が m_1, m_2 のみの時に比べ、後になる。連星を組む PBH が宇宙膨張から切り離される時、重力ポテンシャル U と連星の運動エネルギー T が釣り合う為、 U の角度依存性や PBH の質量による関係がわかれば、 α を解析的な式で書く為の手段になり得る。 m_3 に関する重力ポテンシャル U_{m_3} が潮汐力として働くと考え、次のように書く：

$$U_{m_3} \equiv -\frac{Gm_1m_3}{R|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|} - \frac{Gm_2m_3}{R|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|}. \quad (2.16)$$

ここで連星を形成する m_1, m_2 間の距離に比べ、潮汐力を与える m_3 までの距離が十分大きいとすると

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|^2 &= |\mathbf{x}_1|^2 + |\mathbf{x}_3|^2 - 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 \\ &= |\mathbf{x}_3|^2 \left(1 + \frac{|\mathbf{x}_1|^2}{|\mathbf{x}_3|^2} - 2\frac{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|^2}\right) \\ &\approx |\mathbf{x}_3|^2 \left(1 - 2\frac{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|^2}\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3| \approx |\mathbf{x}_3| \left(1 - \frac{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|^2}\right). \quad (2.18)$$

$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|$ も同様に考えれば、(2.16) 式は

$$U_{m_3} \approx -\frac{Gm_1m_3}{R|\mathbf{x}_3|} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|^2}\right) - \frac{Gm_2m_3}{R|\mathbf{x}_3|} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|^2}\right) \quad (2.19)$$

となる。図 2.7 のように θ, γ をとり、 \mathbf{x}_1 を原点におく。連星に対する m_3 の潮汐力が宇宙膨張によって離される最初の時期の影響が大きいと仮定し、初期条件 $|\mathbf{x}_2| = x, R = R_0$ を代入すれば

$$= -\frac{Gm_3}{R_0|\mathbf{x}_3|} \left(m_1 + m_2 + \frac{m_2x}{|\mathbf{x}_3|} \cos \gamma\right) \quad (2.20)$$

となる。次に $|\mathbf{x}_3|$ について考える。連星の重心は $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ を用いて $|r_{12g}| = \mu x$ で書け、余弦定理より

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_3|^2 &= |r_{12g}|^2 + y^2 - 2|r_{12g}||y| \cos(\pi - \theta) \\ &= \mu^2 x^2 + y^2 + 2\mu xy \cos \theta \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{x}_3| = (\mu^2 x^2 + y^2 + 2\mu xy \cos \theta)^{1/2} \quad (2.22)$$

となる。さらに正弦定理を用いれば $\cos \gamma$ は

$$\frac{y}{\sin \gamma} = \frac{|\mathbf{x}_3|}{\sin(\pi - \theta)}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{y \sin \theta}{|\mathbf{x}_3|} \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \pm \left(1 - \frac{y^2 \sin^2 \theta}{|\mathbf{x}_3|^2}\right)^{1/2} \quad (2.24)$$

となる。よって (2.20) 式は

$$\begin{aligned} U_{m_3} \approx & -\frac{Gm_3}{R_0(\mu^2 x^2 + y^2 + 2\mu xy \cos \theta)^{1/2}} \left\{ m_1 + m_2 \right. \\ & \left. \pm \frac{m_2 x}{(\mu^2 x^2 + y^2 + 2\mu xy \cos \theta)^{1/2}} \left(1 - \frac{y^2 \sin^2 \theta}{\mu^2 x^2 + y^2 + 2\mu xy \cos \theta}\right)^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。{} の中の \pm だが、正は $0 < \gamma < \pi/2$ の場合、負は $\pi/2 < \gamma < \pi$ の場合である。これに図 2.8 と同様の条件 ($m_1 = 0.1M_\odot, m_2 = 10M_\odot, m_3 = 10M_\odot, x = 0.3, y = 0.8$) を代入し図 2.9 にプロットした。

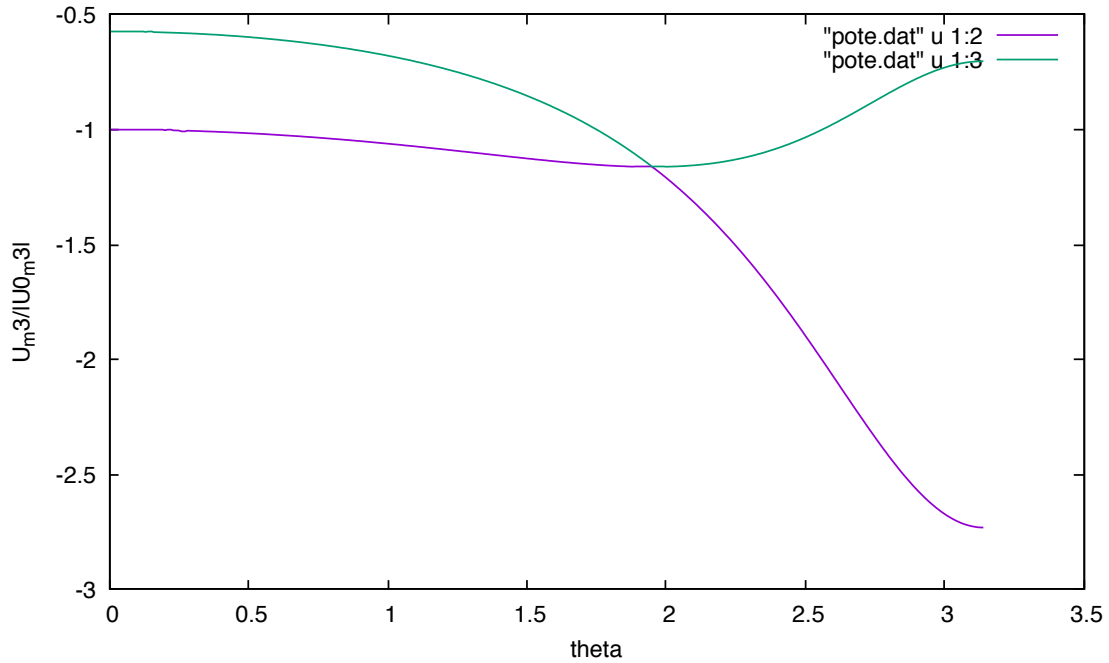


図 2.9 (2.25) 式の角度変化。紫線は $\gamma < \pi/2$, 緑線は $\pi/2 < \gamma$ の場合

図 2.9 と図 2.8 を見比べてみると、明らかに m_3 に関する重力ポテンシャル U_{m_3} が α に関係している事がわかった。

2.6.2 β

図 2.10 のように連星を組む m_1, m_2 の重心を原点にとり、それぞれの PBH に対してベクトルを置く。 m_3 から m_1, m_2 に及ぼす加速度はそれぞれ以下ようになる:

$$\mathbf{a}_{1 \rightarrow 3} = -\frac{m_3}{w^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3), \quad (2.26)$$

$$\mathbf{a}_{2 \rightarrow 3} = -\frac{m_3}{z^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3). \quad (2.27)$$

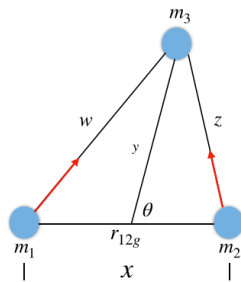


図 2.10 PBH の配置。

これらの m_3 からの重力の差が大きいほど大きな潮汐力を受けると考えられ、 β は m_1, m_2 を結ぶ線分に対し、潮汐力の垂直方向の成分が大きいほど大きくなると予想される。また、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の x 成分を x_{1x}, x_{2x} とし、 y 成分を 0 と置けば $\mathbf{x}_1 = (x_{1x}, 0), \mathbf{x}_2 = (x_{2x}, 0)$ と書ける。 w, z は余弦定理より、

$$\begin{aligned} w &= \{|\mathbf{x}_1|^2 + y^2 - 2|\mathbf{x}_1|y \cos(\pi - \theta)\}^{1/2} \\ &= (|\mathbf{x}_1|^2 + y^2 + 2|\mathbf{x}_1|y \cos \theta)^{1/2} \\ &= (x_{1x}^2 + y^2 - 2x_{1x}y \cos \theta)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} z &= (|\mathbf{x}_2|^2 + y^2 - 2|\mathbf{x}_2|y \cos \theta)^{1/2} \\ &= (x_{2x}^2 + y^2 - 2x_{2x}y \cos \theta)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。また、重心の x 座標から

$$r_{12gx} = \frac{m_1 x_{1x} + m_2 x_{2x}}{m_1 + m_2}. \quad (2.30)$$

さらに、今重心を原点としているので

$$x_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} x_{1x} \quad (2.31)$$

が得られる。 m_1 と m_2 の間の距離の大きさを x と置いているので

$$\begin{aligned} x_{2x} - x_{1x} &= x \\ \Rightarrow -\frac{m_1}{m_2} x_{1x} - x_{1x} &= x \\ \Rightarrow x_{1x} &= -\frac{x}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \\ &= -\frac{m_2 x}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。そして、 m_3 の位置 \mathbf{x}_3 は θ を用いて、 $\mathbf{x}_3 = (y \cos \theta, y \sin \theta)$ と書ける。

ここで (2.26) 式と (2.27) 式の y 成分の差 (これが最大の時 β_{\max}) に依ると考え、絶対値をとると

$$\begin{aligned} |a_{1y \rightarrow 3} - a_{2y \rightarrow 3}| &= \left| m_3 \left\{ -\frac{x_{1y} - x_{3y}}{w^3} + \frac{x_{2y} - x_{3y}}{z^3} \right\} \right| \\ &= \left| m_3 \left\{ \frac{y \sin \theta}{(x_{1x}^2 + y^2 - 2x_{1x}y \cos \theta)^{3/2}} - \frac{y \sin \theta}{(x_{2x}^2 + y^2 - 2x_{2x}y \cos \theta)^{3/2}} \right\} \right| \\ &= \left| m_3 \left\{ \frac{y \sin \theta}{(x_{1x}^2 + y^2 - 2x_{1x}y \cos \theta)^{3/2}} - \frac{y \sin \theta}{\left(\left(-\frac{m_1}{m_2} x_{1x}\right)^2 + y^2 - 2\left(-\frac{m_1}{m_2} x_{1x}\right)y \cos \theta \right)^{3/2}} \right\} \right| \\ &= \left| m_3 y \sin \theta \left\{ \frac{1}{(x_{1x}^2 + y^2 - 2x_{1x}y \cos \theta)^{3/2}} - \frac{1}{\left(\frac{m_1^2}{m_2^2} x_{1x}^2 + y^2 + 2\frac{m_1}{m_2} x_{1x}y \cos \theta\right)^{3/2}} \right\} \right| \\ &= \left| m_3 y \sin \theta \left\{ \frac{1}{\left(\frac{m_2^2 x^2}{(m_1 + m_2)^2} + y^2 + 2\frac{m_2 x}{m_1 + m_2} y \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(\frac{m_1^2 x^2}{(m_1 + m_2)^2} + y^2 - 2\frac{m_1 x}{m_1 + m_2} y \cos \theta\right)^{3/2}} \right\} \right| \end{aligned} \quad (2.34)$$

となる。(2.34) 式を図 2.8 と同様の条件を代入し、 $m_1 = m_2 = m_3 = 10M_\odot$ の場合 (この条件を S とする) と、図 2.7 の条件 A, B それぞれの場合について図 2.11 にプロットした。

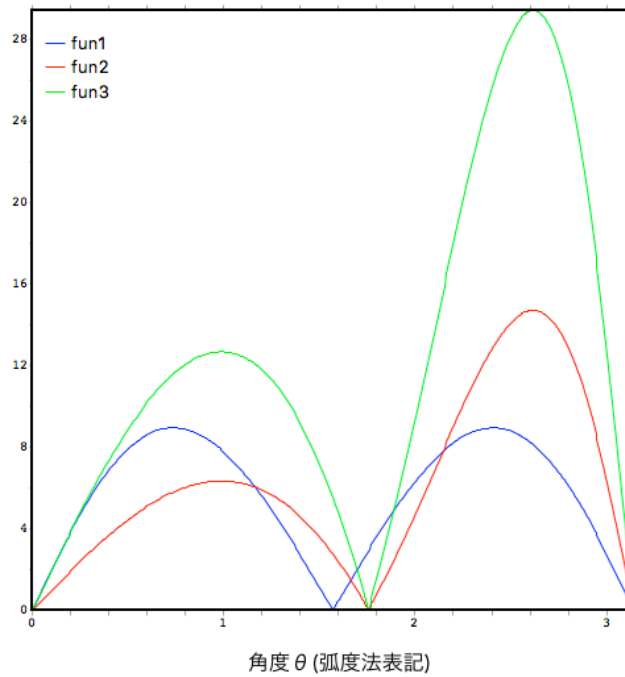


図 2.11 (2.34) 式の角度変化 (青は条件 S, 赤は A, 緑は B)。

図 2.11 を見てみると m_1 と m_2 が等しい条件 S ではちょうど $\pi/2$ のところで最小値をむかえるが、 m_1 と m_2 が異なれば $\pi/2$ からずれる事がわかる。図 2.8 と見比べてみると、明らかに m_1, m_2 に働く潮汐力の垂直方向の成分の差が β に関係している事がわかった。

第3章

結論

重力波観測により、宇宙には太陽質量の約 30 倍のブラックホール (BH) が多数存在していることがわかった。この BH の起源として宇宙初期に形成される原始ブラックホール (PBH) が候補の 1 つとして考えられている。2 つの PBH が他の PBH からの潮汐力を受け、連星を形成すると、その連星は重力波放出によるエネルギーの減少に伴い軌道を縮め、最終的に合体する。PBH 連星の長半径・離心率がわかれば合体時間が一般相対論によって一意的に決まる為、PBH の空間、質量分布の情報から合体数の確率分布が得られ、図 2.2 のように重力波検出器の観測結果と見比べることにより、PBH の存在を検証する為の良い手段になり得る。

本研究では宇宙に存在するダークマターが全て PBH ($f = 1$) だと仮定し、図 2.3 のように連星を形成する PBH と潮汐力を与える PBH、計 3 つの PBH で連星の軌道を指定するパラメーターである α, β を非等質量 PBH の場合で求めることを目的とし研究を行った。

Runge-Kutta-Fehlberg 法 (付録 C) で (2.15) 式の数値積分を行い α, β を見積もった。その結果、今まで同質量 PBH の場合のみで考えられていた α, β を非等質量 PBH の場合で表 2.1 のように見積もる事が出来た。角度によって値が変化し、特に β に関しては最大で約 0.6 の差があることがわかった。また、PBH の質量と潮汐力を与える PBH の角度のみを変化させ α, β との関係を図 2.8 にプロットした。 α に関しては連星に潮汐力を与える m_3 が連星を組む PBH のどちらかに近いとき大きくなり、その変化は質量の小さい m_1 に近いときに特に大きくなることがわかった (図 2.8 左)。 β に関しては上に凸の二次曲線の様に角度によって変化することがわかった (図 2.8 右)。

次に α は m_3 に関する重力ポテンシャルが、 β は潮汐力によって値が大きく変化すると考え、解析的に考察した。その結果、 α, β を決定付ける為に必要な (2.25) 式, (2.34) 式が得られた。

今後は (2.25) 式, (2.34) 式から、数値計算を用いず係数 α, β を初期条件である連星を組む PBH 間の距離 x 、連星の重心から m_3 までの距離 y 、PBH の質量で表す事が出来ないか考えたい。それにより、図 2.2 のように係数を固定せずに宇宙初期でランダムに分布している非等質量 PBH が組むそれぞれの連星に係数を与え、そのことによる合体率の変化について考えたい。また、3 体目の PBH が宇宙膨張から切り離され、連星を形成している PBH に近付き、連星を壊す事もある。Raidal らは 70 体の PBH を用いて数値計算をする事により f が 0.1 以下の時にはこの影響が少ないと結論を出しているが [13]、連星を壊す PBH の影響による合体率の変化なども考えていきたい。

謝辞

まず、初めに指導教員である仙洞田雄一先生には研究に対する様々な助言や、時には夜遅くまで時間を割いて指導して頂き、本当にありがとうございました。何より、仙洞田先生のもとで勉強するなかで学ぶ事の楽しさに気付きました。また、英語・相対論ゼミ、卒論発表等でもご指導頂きました浅田秀樹先生、本当にありがとうございました。

院生の本間敬明さんには発表の資料やわからないところなどを説明して頂き、共同研究者のいない私にとって、とても支えになりました。色々と相談にのって頂いた院生の皆さま、同ゼミのみんな、また親族にもこの場をお借りして感謝を述べたいと思います。ありがとうございました。

付録 A

長半径・短半径

2.2 章で長半径や短半径を見積もる際に使用した (2.3) 式について考える。以下 $G = 1$ とする:

$$a = \alpha x R_{\text{dc}}, \quad b = \beta \frac{2m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{x}{y} \right)^3 a.$$

長半径については、 m_1, m_2 が近付き始める時のスケール因子を共動座標にかけたものが物理的な距離になり、それと比例係数 α との積が長半径になるというのはイメージしやすい。次に短半径について考える。

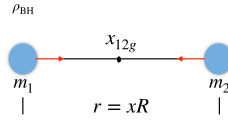


図 A.1 PBH の配置。

図 A.1 のように PBH が置かれているとする。等密度時の BH のエネルギー密度 ρ_{BH} はその時のスケール因子 R_{dc} を用いて

$$\rho_{\text{BH}} \equiv \frac{m_1 + m_2}{2(xR_{\text{dc}})^3} \quad (\text{A.1})$$

と書ける。 m_1 に m_2 から働く力は

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= - \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} (x_1 - x_2) \\ \Rightarrow \left| \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right| &= \frac{m_2}{|x_1 - x_2|^2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と書ける。 $t = 0$ の時を等密度時とし、その時の加速度で m_1 の自由落下 (初速度 0 の等加速度直線運動) を考える。(A.2) 式より

$$\left| \frac{d^2 x_1(0)}{dt^2} \right| = \frac{m_2}{|x_1(0) - x_2(0)|^2}. \quad (\text{A.3})$$

さらに、(A.3) を積分し、初期条件として $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = xR_{\text{dc}}$ とすると

$$x_1 = \frac{m_2}{2(xR_{\text{dc}})^2} t^2 \quad (\text{A.4})$$

と書ける。2 体の重心は時間変化しないので $t = 0$ での重心は

$$\begin{aligned} x_{12g} &= \frac{m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0)}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2 x R_{\text{dc}}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

で書け、重心に達した時、衝突すると考えると (A.4)、(A.5) 式から自由落下時間 t_{ff} は

$$\begin{aligned} \frac{m_2 x R_{\text{dc}}}{m_1 + m_2} &= \frac{m_2}{2(xR_{\text{dc}})^2} t_{\text{ff}}^2 \\ \Rightarrow t_{\text{ff}}^2 &= \frac{2(xR_{\text{dc}})^3}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\rho_{\text{BH}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

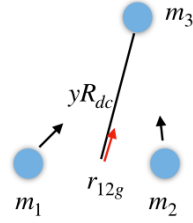


図 A.2 PBH の潮汐力。

また、3 体目からの潮汐力は図 A.2 を参考に図中の赤矢印は m_3 からの力の単位ベクトル \mathbf{e}_{12g} を表すとして、 m_1 と m_2 の重心にかかる加速度は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{12g}}{dt^2} = \frac{m_3}{(yR_{\text{dc}})^2} \mathbf{e}_{12g}. \quad (\text{A.7})$$

重心から微小な量 Δx 離れた場合の加速度を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{m_3}{(yR_{\text{dc}} \pm \Delta x)^2} \mathbf{e}_{12g} \\ &= \frac{m_3}{(yR_{\text{dc}})^2 (1 \pm \frac{\Delta x}{yR_{\text{dc}}})^2} \mathbf{e}_{12g} \\ &\simeq \frac{m_3}{(yR_{\text{dc}})^2} \mathbf{e}_{12g} (1 \mp 2 \frac{\Delta x}{yR_{\text{dc}}} + \dots). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

潮汐力はこれらの差と考える事ができ、 $\Delta x = \pm \alpha x R_{\text{dc}}$ とすれば単位質量あたりの潮汐力は

$$\text{tidal force} \propto \frac{m_3 \alpha x R_{\text{dc}}}{(yR_{\text{dc}})^3} \quad (\text{A.9})$$

と書ける。短半径はこの潮汐力と自由落下時間の 2 乗に比例係数 β がかったものになると考える事ができる。次元も考えてみると短半径 $[L] = \beta \times \text{潮汐力} [LT^{-2}] \times (\text{自由落下時間})^2 [T^2]$ となり、一致している事がわかる。よって短半径は以下のようなになる:

$$\begin{aligned}
 b &= \beta \frac{m_3 \alpha x R_{dc}}{(y R_{dc})^3} \frac{2(x R_{dc})^3}{(m_1 + m_2)} \\
 &= \alpha \beta \frac{2m_3}{m_1 + m_2} \frac{x^4}{y^3} R_{dc} \\
 &= \beta \frac{2m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{x}{y}\right)^3 a.
 \end{aligned}$$

(A.10)

付録 B

ニュートン近似

弱い重力場での計量はミンコフスキー空間の計量から微小なずれ h で書けるとする [14]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (\text{B.1})$$

$c = 1$ とし、条件として

- (1) 重力場は定常で、時間に依らない
- (2) 計量は対称テンソルであり、 $g_{0i} = g_{i0} = 0$, $(i = 1, 2, 3)$
- (3) 物体の速度が光速に比べて遅く、 $\frac{dx^0}{d\tau} \simeq 1$

とする。測地線方程式を求める前にクリストフェル $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ の $(\mu, \nu) = (0, 0)$ 成分は、 $h_{\mu\nu}$ の 2 次の項を無視して

$$\Gamma_{00}^\rho \approx \frac{1}{2} \eta^{\rho\gamma} \left(\frac{\partial h_{0\gamma}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{\gamma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{1}{2} \eta^{\rho\gamma} \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\gamma} \right) \quad (\text{B.2})$$

と近似できる。最後の等号では条件 (1) を使った。測地線方程式の $(\mu, \nu) = (0, 0)$ 成分は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\rho \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} &= -\Gamma_{00}^\rho \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\rho\gamma} \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\rho} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

となる。これがニュートン力学の式

$$\frac{d^2 x^\rho}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} \quad (\text{B.4})$$

に帰着しなければいけないので、(B.3) 式と見比べて

$$h_{00} = -2\phi, \quad (\text{B.5})$$

$$g_{00} = -1 - 2\phi \quad (\text{B.6})$$

が得られる。ここで ϕ は重力ポテンシャルである。[15] によれば Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}) \quad (\text{B.7})$$

の速度の 2 次までの近似で $(\mu, \nu) = (0, 0)$ と $(i, j = 1 \sim 3)$ 成分は

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T^{00} \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla^2 h_{ij} = -8\pi G \delta_{ij} T^{00} \quad (\text{B.9})$$

と書ける。ここで (B.5) 式より (B.8) 式は

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G T^{00} \quad (\text{B.10})$$

poisson 方程式と同じ形で書ける。これより (B.9) 式は

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_{ij} &= -8\pi G \delta_{ij} \frac{\nabla^2 \phi}{4\pi G} \\ &= -2\delta_{ij} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\Rightarrow h_{ij} = -2\delta_{ij} \phi \quad (\text{B.12})$$

h_{ij} は $i = j$ のみで値をもち、 $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$ となる。よってスケール因子を含めて考えた時の計量は

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)R(t)^2 d\mathbf{x}^2 \quad (\text{B.13})$$

と書ける。

付録 C

数値積分法

目標は微分方程式、

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x) \quad (\text{C.1})$$

を解く事だが、数値計算では連続的な微分を離散的に考え、近似的に積分を行う。具体的には

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{dt} = f(t, x), \quad x_{i+1} = x_i + dt f(t, x) \quad (\text{C.2})$$

のように既知の点から (C.1) 式の情報を使って次の位置を離散的に求め、これを繰り返す。この方法は最もシンプルな方法で Euler 法と呼ばれている (図 C.1 左)。

(C.2) 式はテイラー展開 $x(t + dt) \approx x(t) + x'(t)dt + \frac{1}{2}x''dt^2 \dots$ ($' = d/dt$) と比べてみると 1 次までに対応している為、誤差は刻み幅 dt の 2 乗に比例して大きくなる。つまり刻み幅を 2 倍にすれば誤差は 4 倍になる。また、次のように段数 k を用いて数値積分をする方法がある。これは 2 次のテイラー展開までに対応するので、2 次の Runge-Kutta 法と呼ばれる (図 C.1 右):

$$k_1 = hf(t_i, x_i), \quad k_2 = hf\left(t_i + \frac{dt}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad x_{i+1} = x_i + k_2. \quad (\text{C.3})$$

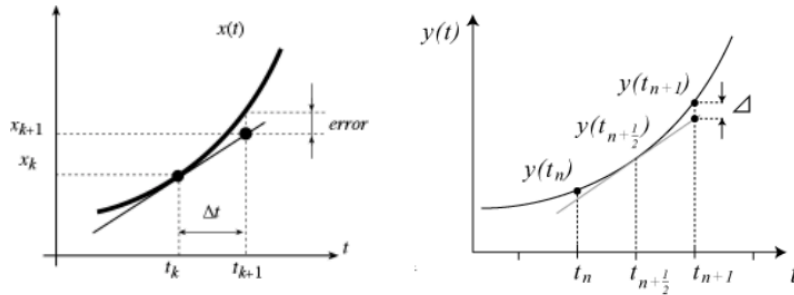


図 C.1 Euler 法 (左) と 2 次の Runge-Kutta 法 (右 ※関数が図では $y(t)$ となっている) [16] より引用。

また、Runge–Kutta 法は次数が高くなる程、計算しなくてはならない段数 k が増えてしまう。また 4 次までの Runge–Kutta 法では段数と次数が対応しているが、それ以上の次数では必要とする段数が増えてしまい計算コストがかかってしまう為、係数も簡単な次の 4 次の Runge–Kutta 法が多く用いられる (図 C.2)[17]:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_i, x_i), \\
 k_2 &= hf\left(t_i + \frac{dt}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}\right), \\
 k_3 &= hf\left(t_i + \frac{dt}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}\right), \\
 k_4 &= hf(t_i + dt, x_i + k_3), \\
 x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

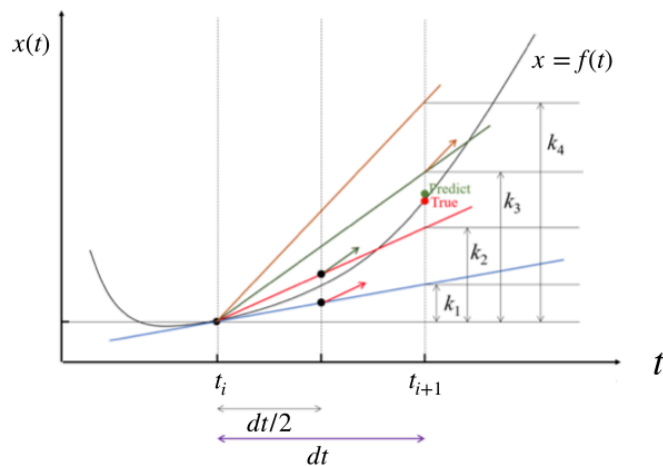


図 C.2 4 次の Runge–Kutta 法 ([18] から引用)。

N 体計算など、重力ポテンシャルによる運動を数値積分する際、距離が十分近付いてしまうと、重力ポテンシャルの分母が小さくなって受ける力が大きくなり、誤差が大きくなってしまいます。その為、そのように誤差が大きくなりそうな時に自動で刻み幅を調節するアルゴリズムもある。本研究で用いた Runge–Kutta–Fehlberg 法を取り上げる [19]。これは、4 次近似と 5 次近似を計算し、その誤差を評価して刻み幅 h を調節する。4 次と 5 次を同時に計算するため、一見、計算コストがかかりそうに感じるが、Runge–Kutta 法の 4 次と 5 次の段数の間で共通している部分が多い為、それによって計算コストを抑えている。

$$\begin{cases} k_1 = hf(t, x^{(4)}) \\ k_2 = hf\left(t + \frac{h}{4}, x^{(4)} + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(t + \frac{3h}{8}, x^{(4)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 = hf\left(t + \frac{12h}{13}, x^{(4)} + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 = hf\left(t + h, x^{(4)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 = hf\left(t + \frac{h}{2}, x^{(4)} - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \end{cases}$$

図 C.3 RKF 法 ([20] から引用)。

図 C.3 を計算し、4 次 $x^{(4)}$ と 5 次 $x^{(5)}$ の精度の近似を次のように得る:

$$\begin{aligned} x_{i+1}^{(5)} &= x_i + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right), \\ x_{i+1}^{(4)} &= x_i + \left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \right). \end{aligned}$$

誤差 $R = |x^{(4)} - x^{(5)}|$ を計算すると、

$$R = |x^{(4)} - x^{(5)}| = \left| \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right| \quad (\text{C.5})$$

となる。そして、(C.5) 式と安全係数 q 、許容誤差を指定する値 ϵ を用いて、刻み幅を評価する w を次のように求める:

$$w = q \left(\frac{\epsilon}{R} \right)^{1/5}. \quad (\text{C.6})$$

w が 1 以上ならば許容誤差範囲内であり、その刻み幅のまま次のステップに進む。しかし 1 未満であれば、 $1/w$ の切り上げた整数 N で刻み幅を分割し、計算を行う。これにより誤差の大きいところでは刻み幅を小さくし、計算する事が可能になる。図 C.4 に初速度 0 で重力のみ働く 3 つの質点の軌道計算を 4 次の Runge-Kutta 法と Runge-Kutta-Fehlberg 法を用いて比較した。4 次の Runge-Kutta 法では刻み幅が大きすぎ、質点が離れていってしまっている。

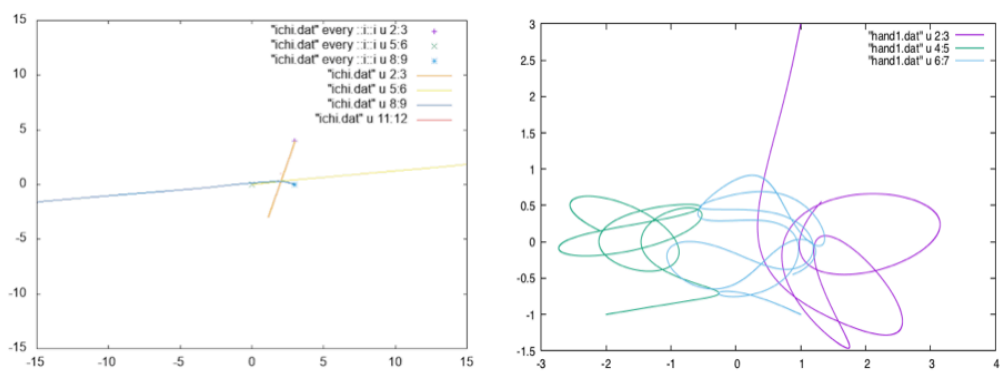


図 C.4 4 次の RK 法 (左) と RK4F 法の比較 (右)。

付録 D

数値計算の信頼性

通常、多体系でも全エネルギーと全角運動量は保存する。今回行った数値計算の信頼性を考える為、ハミルトニアン H (図 D.1) と角運動量 L (図 D.2) について計算を行い、保存しているかを確認した。変数を t ではなくスケール因子 R として計算している。図 D.1 (図 D.2) の縦軸は初期値のハミルトニアン (全角運動量) で規格化している。

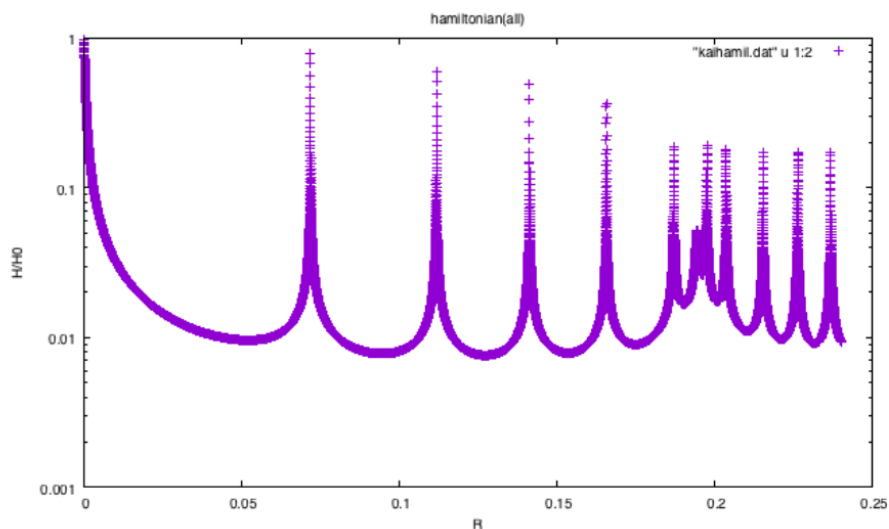


図 D.1 ハミルトニアンの時間変化。

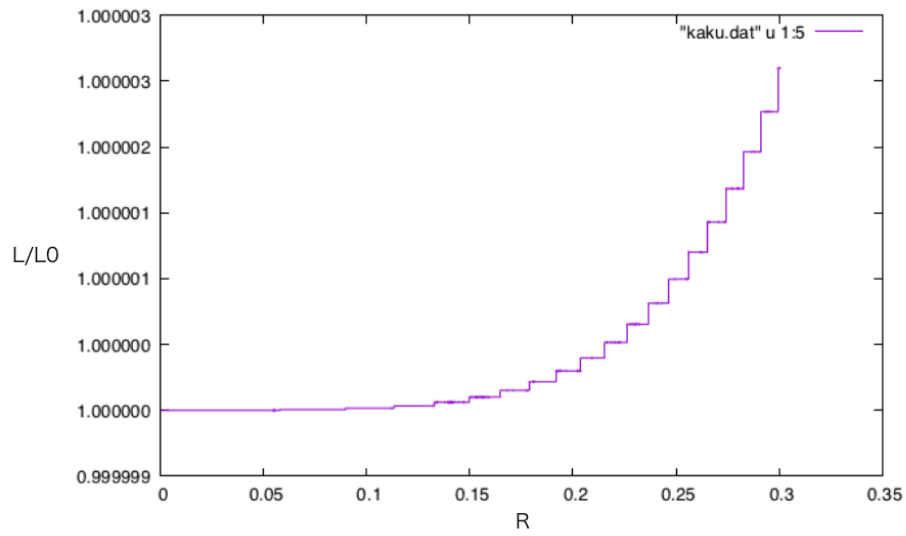


図 D.2 全角運動量の時間変化。

ハミルトニアンは質点が近付いた時に大きく変化しているが、その後、同じくらいの値を取っている為、概ね保存しているように見える。全角運動量についても概ね保存している事がわかった。しかし、ステップが増えていくと少しずつ誤差が出てきている事もわかる。

参考文献

- [1] Ya.B. Zel'dovich and I.D. Novikov, *Astron. Zh.* **43**, 758 (1966)
- [2] S. Hawking, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **152**, 75 (1971)
- [3] 須山輝明, 田中貴浩, 横山修一郎, *日本物理学会誌* **72**, No.10, p.723-727 (2017)
- [4] B.J. Carr, *Astrophys. J.* **201**, 1 (1975)
- [5] Planck reveals an almost perfect universe 欧州宇宙機関 (2013)
https://m.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck/Planck_reveals_an_almost_perfect_Universe
(accessed 2019-3-14)
- [6] P.C. Peters and J. Mathews, *Phys. Rev.* **131**, 435 (1963)
- [7] P.C. Peters, *Phys. Rev.* **136**, B1224 (1964)
- [8] M. Sasaki, T. Suyama, T.Tanaka and S. Yokoyama, *Phys. Rec. Lett.* **117**, 061101 (2016)
- [9] M. Sasaki, T. Suyama, T.Tanaka and S. Yokoyama, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 059901 (2018)
- [10] T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka, and K.S. Thorne, *Astrophys. J.* **487**, L139 (1997)
- [11] K. Ioka, T. Chiba, T. Tanaka, and T. Nakamura, *Phys. Rev. D* **58**, 063003 (1998)
- [12] M. Raidal, V. Vaskonen, and H. Veermäe, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1709**, 037 (2017)
- [13] M. Raidal, C. Spethmann, V. Vaskonen and H. Veermäe, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1902**, 018 (2019)
- [14] 佐藤勝彦, 相対性理論 (岩波書店, Tokyo, 1996)
- [15] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York, 1972)
- [16] 東海大学コンピュータ応用工学科 稲葉研究室 wiki (2015)
<http://www.inaba-lab.org/wiki/index.php/シミュレーション> (accessed 2019-3-14)
- [17] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery (丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠 訳) *Numerical Recipes in C 日本語版* (技術評論社, Tokyo, 2010) 第 15 章 p.532
- [18] 数値計算を使って常微分方程式を解く (2018)
<http://shimaphoto03.com/science/rk-method/> (accessed 2019-3-14)
- [19] 田口俊弘, *Fortran ハンドブック* (技術評論社, Tokyo, 2015)
- [20] ルンゲクッタ法の説明と刻み幅制御 (2015)
<http://slpr.sakura.ne.jp/qp/runge-kutta-ex/> (accessed 2019-3-14)