

**N体問題における数値計算法とヒル方程式について**  
**Numerical method in the N-body problem**  
**and the Hill's equation**

島沢 竜平

Ryuhei Shimazawa

学籍番号 22980119

北海道大学 理学部地球科学科(地球物理学)

地球惑星大気物理学研究室

平成 14 年 1 月 31 日

## 要旨

本論文では、微惑星からの惑星形成をシミュレーションする際に必要となる基本的な2つの事柄を取り上げた。1つは重力多体系 ( $N$  体問題) での標準的な数値計算法の1つであるリープフロッグ法, もう1つは微惑星間の近接相互作用を解析するための運動方程式であるヒル方程式である。リープフロッグ法はハミルトン力学系における常微分方程式を解くための数値計算法の1つである。リープフロッグ法による数値解は、常微分方程式の解法としてよく使われるオイラー法, ルンゲクッタ法の解にはない, エネルギー保存に近い性質を持っている。このことからリープフロッグ法を使えばオイラー法, ルンゲクッタ法よりも, 力学的に信頼性の高い解を得ることができる。また, 微惑星の位置を, ヒル座標系と呼ばれる原点が中心星の周りを回転するような座標系で記述することができる。そこから得られるヒル方程式を利用して微惑星の運動を表現することで, 相対運動と重心運動を分離することができ, さらに規格化することで方程式が, 相互作用する微惑星の質量を含まなくなる。故にその解は任意の質量比をもつ, どんなペアの粒子にも適用することができる。ヒル方程式による相互作用の解析は  $N$  体シミュレーションから得られる計算結果を物理的に解釈する上で欠かせないものである。

## 目次

<b>1</b>	<b>序文</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>数値計算法</b>	<b>3</b>
2.1	数値計算法における誤差	4
2.1.1	離散化誤差	4
2.1.2	丸め誤差(打切り誤差)	5
2.2	種々の計算法	6
2.2.1	オイラー法	6
2.2.2	ルンゲ・クッタ法	6
2.2.3	リープフロッグ法	7
2.3	数値例	9
2.4	まとめ	10
<b>3</b>	<b>3体問題におけるヒル方程式</b>	<b>12</b>
3.1	ヒル方程式	13
3.2	ケプラー運動	15
3.3	重心運動と相対運動の分離	16
3.4	ヒル方程式の無次元化	18
3.5	ヤコビ積分	21
3.6	まとめ	23
<b>A</b>	<b>数値積分</b>	<b>24</b>
A.1	シンプレクティック数値積分法	24
A.2	調和振動子のリープフロッグ法における保存量	24
A.2.1	導出	24
A.2.2	行列を使った導出	25
<b>B</b>	<b>ヒル方程式</b>	<b>27</b>
B.1	ヒル方程式の導出	27
B.2	ヒル方程式の解	30
B.3	ヒル半径	31
B.4	ヤコビ積分の導出	32
	<b>参考文献</b>	<b>34</b>

## 1 序文

N 体問題とは、ハミルトン力学系において N 個の物体があることを想定し、その N 個の物体の座標と運動量が初期条件の下、重力などの相互作用によってどのように時間発展するかを考える問題のことである。重力相互作用する系では、N が 3 以上になると解析解は存在しないことが知られている。従って N 個の独立な粒子の運動方程式を数値的に解くことによりそれぞれの粒子の軌道を得ることが重要となる。

例えば、空間内に N 個の粒子が存在し、相互作用は重力のみとした場合、粒子  $i$  は以下の運動方程式に従って運動する。

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^N G \frac{m_k}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \quad (1 \leq k \leq N). \quad (1.1)$$

ここで  $\mathbf{r}_i$  は粒子  $i$  の位置ベクトル、 $m_k$  は粒子  $k$  の質量である。この方程式を数値的に解き、各タイムステップでの全粒子の位置と時間変化を知ることによって粒子全体の振る舞いがわかる。

惑星科学や天文学の分野では N 体問題は

- 惑星形成の際の微惑星群の時間発展,
- ジャイアントインパクト説に沿った月形成過程解析,
- 銀河衝突,

等の問題に広く用いられている。

本論文は惑星形成における微惑星集積過程をシミュレーションするための N 体問題を扱う際に使われる数値計算法と運動方程式について、基本的な部分について調べその解説を試みたものである。

第 2 章では数値計算法について触れる。この章は Makino et al., 2001 の数値計算法に関する部分を抜き出し解説を加えたものである。第 3 章はヒル方程式について述べている。ヒル方程式の性質、特徴などをグラフを用いて説明する。この章は Nakazawa et al., 1989 の論文レビューであり、全訳に解説を加えた形で載せた。各章とも詳細な式の導出は本文中には含めないことにし、付録として論文の最後にまとめている。なお、原文中に誤植があった。その部分は修正して載せる。

## 2 数値計算法

常微分方程式を解く際に用いられる数値計算法には様々な種類があり、代表的なものとして、オイラー法とルンゲクッタ法が挙げられる。しかし、上記2つはあくまで一般の常微分方程式の数値解法であり、力学系での運動方程式を解くのに用いるには不都合な部分がある。N 体問題を数値計算で解く上で注意すべき問題点は、

1. 解くべき方程式の数が多く、
2. 積分時間が長い、

ことである。

例えば前章で記した式 (1.1) のような場合を考える。全ての粒子からの寄与を考慮すると、1つのタイムステップあたり N 個の粒子について、 $N(N-1)$  回、式 (1.1) の和の中の式を計算しなければならない。解くべき計算式の数  $N$  の自乗に比例して増えていく。N が大きくなれば計算量が膨大となり、計算時間が長くなる。よって使用する数値計算法は、計算機にかかる負荷を考えて、アルゴリズムが簡単である必要がある。また惑星形成にかかる時間は非常に長い<sup>1</sup>ことから長時間積分において誤差が小さいことも必要となってくる。さらに、オイラー法、ルンゲクッタ法ではエネルギーが積分時間に比例して増えるという現象が起こる (2.3 節)。これは惑星形成の N 体問題を扱う際は、ケプラー運動をしている微惑星が中心星から離れていく、または中心星に落ち込んでしまうことを意味しており、力学系での数値計算法として使うには都合の悪い性質である。

結局、N 体問題を解く場合の数値計算法に求められる条件は主に以下の3つにまとめられる。

1. アルゴリズムが簡便であること、
2. タイムステップ数が非常に大きくても離散化誤差の増大が小さい、
3. エネルギーの保存が良い。

この3つの条件を満足する、重力多体系における数値計算法として現在よく用いられるのが、無衝突系<sup>2</sup>の N 体シミュレーションではリープフロッグ法、衝突系ではリープフロッグより高い精度の解を得られる4次のエルミート法がよく使われている。

この章では、まず数値計算における誤差について解説し、次にその議論を元に常微分方程式を解く場合の代表的な数値計算法としてオイラー法とルンゲクッタ法を取り上げる。最後にリープフロッグ法が上記の条件に関して他の計算法より優れていることを示す。

---

<sup>1</sup>木星: 約  $10^7$  年, 土星: 約  $10^8$  年

<sup>2</sup>粒子同士の衝突が起こらないと仮定した系。銀河衝突など。

## 2.1 数値計算法における誤差

数値計算における誤差の議論は、得られた数値解の信頼性を評価する上で非常に重要である。そこで本節では数値計算法の比較を行う前に誤差について解説をする。数値計算における誤差は大別して2種類ある。離散化誤差と丸め誤差である。前者は数値計算の方法によって発生する誤差であり、後者はコンピュータ内部で計算を実行する過程において発生する。

### 2.1.1 離散化誤差

$m$  次 ( $m=1,2, \dots$ ) の離散化誤差とは

$$X(t_i) = x(t_i) + O((\Delta t)^{m+1}), \quad (2.1.1)$$

を満たす  $O((\Delta t)^{m+1})$  のことをいう。ここで  $\Delta t$  はタイムステップ幅、 $X(t_i)$ ,  $x(t_i)$  はそれぞれ時間  $t_i$  での真の解, 数値解である。 $t_i + \Delta t$  での  $x$  の真の解をテイラー展開すると,

$$X(t_i + \Delta t) = X(t_i) + \Delta t \frac{dX(t_i)}{dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{d^2X(t_i)}{dt^2} + O((\Delta t)^3). \quad (2.1.2)$$

オイラー法を例にすると、下式のように離散化される。

$$x(t_i + \Delta t) = x_{i+1} = x_i + \Delta t f(x_i, t_i), \quad (2.1.3)$$

ここで

$$f(x_i, t_i) = \frac{dx_i}{dt}. \quad (2.1.4)$$

この式からオイラー法の離散化誤差は

$$X(t_i) - x(t_i) = \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2} + O((\Delta t)^3), \quad (2.1.5)$$

と表され、これは真の解のテイラー展開とオイラー法による離散化式を比較した時、 $\Delta t$  の1次の項まで一致しており、2次の誤差である。数値計算では方法毎にこの離散化誤差が異なる。離散化誤差は1つのタイムステップごとに蓄積していくため、数値計算で誤差を小さくする作業というのは主にこの離散化誤差を小さくすることを指す。N体シミュレーションでは想定する時間軸が長いいため離散化誤差が小さいことが求められる。

## 2.1.2 丸め誤差 (打切り誤差)

コンピュータは数値を有限の桁数 (ビット数) でしか記憶できない. つまり無限小数となるものをどこかで切捨て (丸める) ないと値を記憶できない. この切捨てにより真の解からの誤差が発生する. 従って四則演算, あるいは関数計算をした時に得られる答えというものは厳密に正しいわけではない. このようなコンピュータによる数値表現に起因する誤差のことを丸め (打切り) 誤差という. 丸め誤差は大きく分けて2種類ある.

## ○ 記憶における丸め誤差

数学的な実数とコンピュータの実数とは意味合いが違う.

- 数学的な実数 … 常に厳密な値をもつ.
- コンピュータの実数 …  
コンピュータ内部では数学的な実数は以下のように表現されている.

$$(\text{コンピュータの実数}) = (\text{符号}) \times (2^{\text{指数}}) \times (\text{仮数}). \quad (2.1.6)$$

float(double) 型 (コンピュータにおける数字の記憶形式) では符号に1ビット, 指数に8(11)ビット, 仮数に23(52)ビットを与え, どんな実数もこのビット数の範囲でしか表現できない. つまりコンピュータは有限の桁数しか持つ事ができない.

## ○ 演算における丸め誤差

- 桁落ちによる誤差 …  
十進法で有効数字4桁の浮動小数点表示を考える.

$$0.1234 \times 10^2 - 0.1233 \times 10^2 = 0.100 \times 10^{-1} \quad \dots (\text{厳密解}), \quad (2.1.7)$$

$$= 0.1 \times 10^{-1} \quad \dots (\text{数値解}). \quad (2.1.8)$$

有効数字の指定方法により解の値が異なる.

- 情報落ちによる誤差 …

$$0.1234 \times 10^2 - 0.1233 \times 10^{-1} = 0.1235233 \times 10^2 \quad \dots (\text{厳密解}), \quad (2.1.9)$$

$$= 0.1235 \times 10^2 \quad \dots (\text{数値解}). \quad (2.1.10)$$

$0.233 \times 10^{-2}$  が切り捨てられ, 小さい方の数からみると誤差が大きくなってしまっている.

本節で説明した離散化誤差, 丸め誤差は数値計算を使う場合には不可避なものである. 数値計算をする際はこのような誤差の影響を考慮に入れ, 値の評価をする必要がある.

## 2.2 種々の計算法

常微分方程式の一般的数値解法としてオイラー法, ルンゲクッタ法, ハミルトン力学系での解法としてリープフロッグ法を挙げ, 公式の形と離散化誤差の大きさを示す. エネルギーの保存に関しては次節 (2.3) で扱う.

### 2.2.1 オイラー法

例えば以下のような1変数の微分方程式

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.2.1)$$

を例に考える. オイラー法では時刻  $t_i$  での数値解:  $x_i$  として,  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  での数値解を

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t f(x_i, t_i), \quad (2.2.2)$$

と書く. つまり真の解に対する時刻  $t_i$  での接線を数値解としよう, ということである. 後は  $x_1$  から順に  $x_2, x_3, x_4 \cdots x_n$  と計算していけば, 帰納的に任意の時間での数値解  $x_n$  が求まる.

(2.1.1) 節の例でも示したとおり, タイムステップに対して2次の離散化誤差を持つ. オイラー法は常微分方程式の解法としては最も単純なものであり, 上記の通りアルゴリズムも非常に簡単である.

### 2.2.2 ルンゲ・クッタ法

ルンゲクッタ法はタイムステップの midpoint で, 接線の傾きを計算しなおして, 次の時間の数値解を求める. ルンゲクッタ法は, 離散化誤差の大きさに応じて種類がある.

以下でも式 (2.2.1) を例にする. ルンゲクッタ法には一般公式があり, 任意の  $m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) 次の精度を持つ公式を作ることができる. 例えば2次のルンゲ・クッタ公式は以下の形となる.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta t f(k_i, t_i + h/2), \\ k_i &= x_i + \frac{h}{2} f(x_i, t_i). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

この公式でもオイラー法の場合と同様にして, 離散化誤差が3次の大きさを持つことを証明できる.



高次のルンゲクッタ法を使えば離散化誤差は、理論上無限に小さくなる。だが、高次になるほどアルゴリズムが複雑になり、計算量が増大する。これはひいては丸め誤差の増大にもつながることになるので通常、常微分方程式の解法として4次の(古典的)ルンゲ・クッタ公式が使われる。

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.2.4)$$

$$k_1 = f(x_n, t_n), \quad (2.2.5)$$

$$k_2 = f(x_n + hk_1/2, t_n + h/2), \quad (2.2.6)$$

$$k_3 = f(x_n + hk_2/2, t_n + h/2), \quad (2.2.7)$$

$$k_4 = f(x_n + hk_3, t_n + h). \quad (2.2.8)$$

### 2.2.3 リープフロッグ法

リープフロッグ法はハミルトン力学系のための数値解法である。ハミルトン力学系では、物体の位置と運動量を用いて運動の性質を記述する。よってリープフロッグ公式は物体の位置、速度、運動方程式から求まる加速度、の3つによって形作られている。

リープフロッグ(蛙跳び)法は、オイラー法と似た式で表される。この方法の特徴は、時間  $t_{i+1}$  での位置  $x$  を求める際に、 $t_i$  での速度ではなく、 $t_{i+1/2}$  での速度を使う点にある。

リープフロッグ公式は

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i), \quad (a(x_i) : x_i \text{ での加速度}) \quad (2.2.9)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_{i+1/2}. \quad (2.2.10)$$

出発点での  $v_{1/2}$  はオイラー法によって求める。

$$v_{1/2} = v_0 + \Delta t a(x_0)/2. \quad (2.2.11)$$

終了点では

$$v_i = v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i)/2, \quad (2.2.12)$$

を使う。

局所誤差<sup>3</sup>は2次であり、離散化誤差という意味では精度の良い公式というわけではない。しかし前述したようにこの公式は重力多体系の数値計算に非常によく使われている。

<sup>3</sup>1ステップの計算で生じる誤差

この公式を使う利点は,

- プログラムが簡単,
- ハミルトン系に対して, 例えばエネルギーや角運動量のような保存量が非常によく保存する,

ことである. これらの保存量は多くの場合ある程度以上に誤差が増えない. 一方, 普通の数値積分法では真の解が周期解であっても周期解からずれていく.

エネルギーが保存していればそれだけで計算が正しいということにはならない. しかし力学系での時間軸の長い数値計算において, エネルギーの保存が良いということはそうでないものよりも数値計算法としては適していると考えられる. 保存量の性質については次節で解説する.

### 2.3 数値例

数値例として

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \quad (2.3.1)$$

をリープフロッグとルンゲクッタで解いた解を, 解析解と共に図 (1) に示す. また図 (2) ではオイラー法, 2次のルンゲクッタ法でのエネルギーの時間発展を, リープフロッグのものと比較している. 初期条件は  $(x_0, v_0) = (1, 0)$  タイムステップは  $1/4$  であり, 積分時間も同じである. 特徴的なのはリープフロッグではエネルギーが周期的にしか変化しないのに対し, オイラー, ルンゲクッタでは単調に増えているということである.

結論から言えば調和振動子の場合, リープフロッグ公式は以下の量

$$H' = \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 + v_{i+1}^2) - \frac{(\Delta t)^2}{8}x_{i+1}^2, \quad (2.3.2)$$

が保存することが確かめられる. このように数値解が力学的に意味のある保存量を持つような数値積分法を, シンプレクティック数値積分法 (A.1 節) という. この章の冒頭で名前が出た4次のエルミート法もシンプレクティックな性質を持つ. また, 今回は扱わないが, より離散化誤差の小さい高次のシンプレクティック法も存在することが確かめられている.

式 (2.3.2) の導出を付録 (A.2) 節に示した. 式 (2.3.2) はリープフロッグ公式を代入すれば簡単に求めることができる. しかし, 付録 (A.2) 節では同様の証明を, 行列を使って行っている. これは数値計算法の性質が行列の形から検討できることによる.

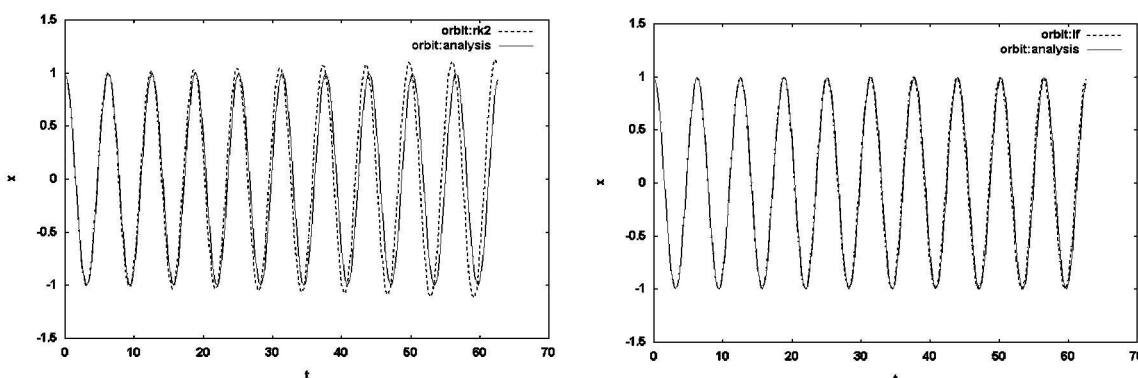


図 1: 調和振動子の時間発展 左図:2次ルンゲクッタ (破線) と解析解 (実線). 右図:リープフロッグ (破線) と解析解 (実線)

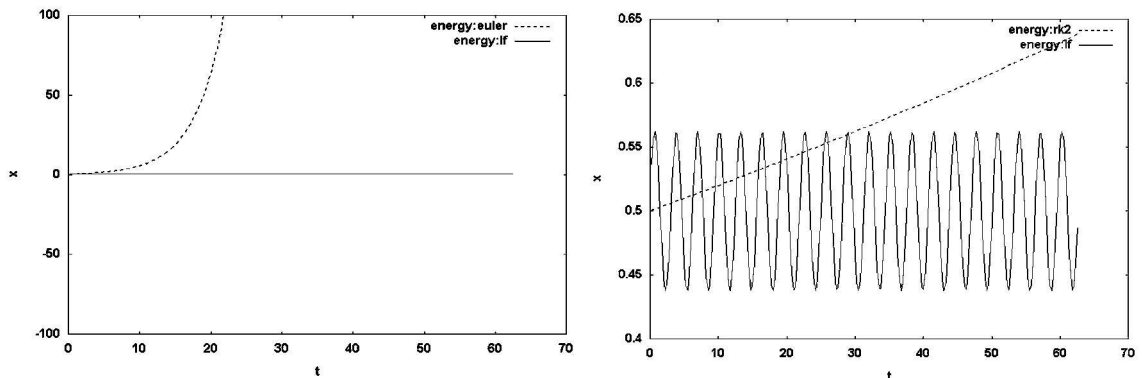


図 2: 調和振動子の全エネルギーの時間発展 左図:オイラー (破線) とリープフロッグ (実線). 右図:2次ルンゲクッタ (破線) とリープフロッグ (実線)

## 2.4 まとめ

本節で扱った数値計算法の特徴を以下にまとめる.

- オイラー法の特徴
  - 計算精度をあげると計算量が増える.
  - ステップ数が大きくなるので丸め誤差の影響が大きくなる.
  - エネルギーが保存しない.
- ルンゲクッタ法の特徴
  - 計算精度をあげると計算量が増える.
  - ステップ数が大きくなるので丸め誤差の影響が大きくなる.
  - エネルギーが保存しない.
- リープフロッグ法の特徴
  - 系のエネルギーの永年誤差の蓄積が起こらない.
  - 計算量が少ない.
  - 精度は高くない.

---

オイラー法, ルンゲクッタ法では, 長い時間軸をとった時の計算結果の精度が悪く, またエネルギーが保存しないためハミルトン系の  $N$  体問題に利用することはできない. 以上の数値計算法の中ではリープフロッグ法が最も適している.

### 3 3体問題におけるヒル方程式

多数の微惑星は原始太陽の周りを回りながら重力散乱, 衝突を繰り返し, 最終的には惑星を形成する. 大きな  $N$  個の微惑星を原始太陽の周りで公転させても微惑星同士が出会う (微惑星同士の相互作用が無視できないくらいに微惑星同士が近づく) 確率は大きくはない. 微惑星同士が近づいた時は, 力学的には, 太陽と2つの微惑星の関係について考慮すればよい. 従って,  $N$  体問題について考えるためには, 少なくとも3体問題 (原始太陽と互いに影響を及ぼしうる2つの公転する物体) に対し数学的な定式化を行う必要がある. しかし一般的な3体問題は複雑であり, 3体問題を解析的に扱うのは非常に難しい.

ここで, 微惑星 (または原始惑星) の質量が原始太陽の質量に比べるとかなり小さいこと, 微惑星がほぼ円軌道を描いて公転していることに着目すると, 元々は月軌道の研究に使うために考え出されたヒル方程式を適用することができる (Hill, 1878). ヒル方程式を詳細に理解することによって以下のような利点を見出すことができる.

- 系の重心運動と相対運動はそれぞれ分けることができ, 重心運動の方程式は解析的に積分できる.
- 相対運動の方程式は質量合計の3乗根で規格化することができる. つまりもし具体的な質量を持つ微惑星の相対運動を求めることができるのなら, 任意の質量の微惑星の軌道も求めることができる.
- ヒル方程式で表された系にはヤコビ積分と呼ばれるエネルギー積分が存在する.

故に, ヒル方程式の枠組みの中で微惑星の重力散乱, 衝突などを考えることは非常に有益である. 本章では, 惑星系形成過程での太陽重力場の中での微惑星群の物理過程を記述する前段階として, ヒル方程式について紹介する.

### 3.1 ヒル方程式

質量  $m_1$  をもつ原始惑星と質量  $m_2$  をもつ微惑星 (微惑星 1, 微惑星 2 とする) が原始太陽の周りを回っている状態を考える. まず述べておきたいのは, ヒル座標系と呼ばれる局所的<sup>4</sup>な回転するデカルト座標系である. この座標系は以下で表される.

$$\begin{cases} x = \tilde{\omega} - a_0, \\ y = a_0(\theta - \Omega_0 t), \\ z = z. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

ここで  $a_0$  は半長軸の長さ,  $(\tilde{\omega}, \theta, z)$  は円柱座標を表す.  $z$  軸は黄道面に垂直で系の重心を 0 とする.  $\Omega_0$  は  $\omega = a_0$  でのケプラー角速度であり以下のように表される.

$$\Omega_0^2 = G(M_\odot + m_1 + m_2)/a_0^3.$$

ここで  $M_\odot$  は太陽質量を表す. 次にヒル近似と呼ばれる仮定を行う (Hill, 1878).

$$m_j \ll M_\odot \quad (j = 1, 2),$$

および

$$\begin{cases} |x_j|, |z_j| \ll a_0, \\ |x'_j|, |y'_j|, |z'_j| \ll a_0 \Omega_0, \\ |x''_j|, |y''_j|, |z''_j| \ll a_0 \Omega_0^2. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

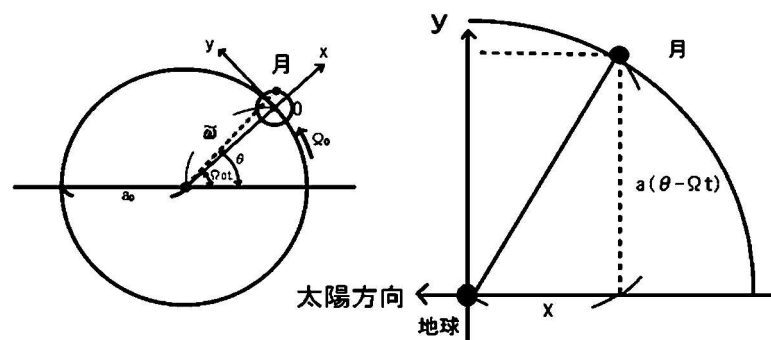


図 3: ヒル座標系 : 月を使った例

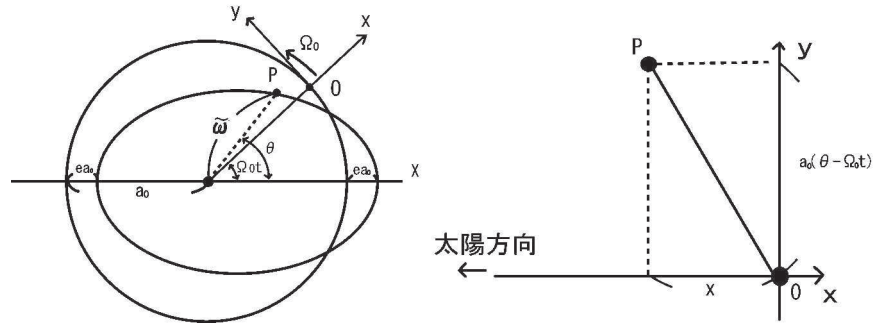


図 4: ヒル座標系：微惑星の例

プライムは時間微分を表す. 上式で注意すべきことは  $|y_j| \ll a_0$  という条件が必要でないことである. 後で述べるが太陽を中心とする軌道を回る粒子を表す時, 上式は以下の様にも書ける.

$$\begin{cases} e_j, & i_j \ll 1, \\ |a_j - a_0| \ll a_0. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$a_j, e_j, i_j$  はそれぞれ, 瞬間の太陽中心からの半長軸, 離心率,  $j$  番目の粒子の, 基準面からの傾斜角を表す. 上式は今我々が仮定している系をよく満たしている.

運動方程式にヒル近似の4つの方程式を代入し, 1次の項を残すことによって, 粒子  $j$  に関するヒル方程式を得ることができる (付録 B.1).

$$\begin{cases} x_j'' - 2\Omega_0 y_j' = 3\Omega_0^2 x_j + \frac{\nu_j}{r^3} (x_i - x_j), \\ y_j'' + 2\Omega_0 x_j' = \frac{\nu_j}{r^3} (y_i - y_j), \\ z_j'' = -\Omega_0^2 z_j + \frac{\nu_j}{r^3} (z_i - z_j). \end{cases} \quad (3.1.4)$$

ここで

$$\nu_j = m_j a_0^3 \Omega_0^2 / M_\odot.$$

$r$  は以下の式で与えられる, 2つの周回粒子間の距離である.

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

式 (3.1.4) において右辺の第1, 2項はそれぞれ, 潮汐力 (太陽重力と遠心力の和), 相互重力を示す. 左辺第2項はコリオリ力によるものである.

<sup>4</sup>ヒル座標系で表される座標が公転軌道半径に比べ小さいということ



### 3.2 ケプラー運動

相対距離  $r$  が非常に大きい時, 重力相互作用の項は無視することができ, 式 (3.1.4) の運動方程式は厳密に解くことができる (Henon and Petit, 1986, 付録 B.2 節).

$$\begin{cases} x_j(t) = b_j - e_j a_0 \cos(\Omega_0 t - \tau_j), \\ y_j(t) = -\frac{3}{2} b_j (\Omega_0 t - \phi_j) + 2e_j a_0 \sin(\Omega_0 t - \tau_j), \\ z_j(t) = i_j a_0 \sin(\Omega_0 t - \omega_j). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

12 のパラメータ,  $b_j, e_j, i_j, \tau_j, \phi_j$  と  $\omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) は積分定数 (付録 B.2 節) である. 速度を求めると,

$$\begin{cases} x'_j(t) = e_j a_0 \Omega_0 \sin(\Omega_0 t - \tau_j), \\ y'_j(t) = \{-\frac{3}{2} b_j + 2e_j a_0 \cos(\Omega_0 t - \tau_j)\} \Omega_0, \\ z'_j(t) = i_j a_0 \Omega_0 \cos(\Omega_0 t - \omega_j). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

上記のヒル方程式の解はケプラー運動の解と考えるとよい. なぜなら, これらは  $\nu_j = 0$  (相互重力無し, 太陽重力のみ) という仮定の下に求めた解だからである. 実際,  $b_j/a_0, e_j, i_j$  が単位元よりも十分に小さければこれらを示すことができる. ここで  $a_0 + b_j, e_j, i_j$  はそれぞれ半長軸, 離心率, ケプラー軌道からの傾きを示す.  $\tau_j, \phi_j, \omega_j$  はそれぞれ位相角を示している.  $(x_j, y_j, z_j)$  で与えられるケプラー運動は2つの運動から成る.

$$\begin{cases} x_{Gj} = b_j, \\ y_{Gj} = -\frac{3}{2} b_j (\Omega_0 t - \phi_j), \\ z_{Gj}(t) = 0. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

および

$$\begin{cases} x_{Ej} = -e_j a_0 \cos(\Omega_0 t - \tau_j), \\ y_{Ej} = 2e_j a_0 \sin(\Omega_0 t - \tau_j), \\ z_{Ej} = i_j a_0 \sin(\Omega_0 t - \omega_j). \end{cases} \quad (3.2.4)$$

案内中心の運動は  $a_0, a_j$  の差異によるケプラーシアー (差動回転) による. 一方, 周転円運動は  $a_0$  でのケプラー周期を持ち,  $e_j, 2e_j$  を離心率に持つような軌道を描く. 相互作用が無視できないような一般的な場合でも, 式 (3.2.1) のヒル方程式の解は粒子の運動を表現するのに適している. しかし, この場合だと,  $b_j, e_j, i_j, \tau_j, \phi_j, \omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) は時間の関数となる. それらはケプラー軌道の要素である.

### 3.3 重心運動と相対運動の分離

粒子がそれぞれの位置ベクトルに対して太陽重力の影響を受け、相互作用の項が2つの粒子間の相対距離のみの関数だとすると、運動を重心運動と相対運動の2つに分けることができる。一般に3体問題においては重力  $GM_{\odot}r_j/r^3$  は、位置ベクトルに対して非線形であり、故に、運動を2つに分けることは出来ない。一方、ヒル方程式では太陽重力は線形な形で表現されており、その運動を分離することができる。ここで相対座標と重心座標を取り入れる。それぞれは以下の様に表現される。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \quad \text{と} \quad \mathbf{X} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.3.1)$$

この変換で、ヒル方程式を重心運動と相対運動に分離した形で書き直すことが出来る。

重心運動の方程式は

$$\begin{cases} X'' - 2\Omega_0 Y' = 3\Omega_0^2 X, \\ Y'' + 2\Omega_0 X' = 0, \\ Z'' = -\Omega_0^2 Z. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

相対運動の方程式は

$$\begin{cases} x'' - 2\Omega_0 y' = 3\Omega_0^2 x - \frac{\mu}{r^3} x, \\ y'' + 2\Omega_0 x' = -\frac{\mu}{r^3} y, \\ z'' = -\Omega_0^2 z - \frac{\mu}{r^3} z. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

ここで

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{M_{\odot}} a_0^3 \Omega_0^2, \quad (3.3.4)$$

である。重心運動の方程式を見ると、重心は純粹にケプラー運動なので解析的に式 (3.2.1) のヒル方程式の解と同じ形の解を求めることができる。一方相対運動を示す式 (3.3.3) は解くことはできないが、式 (3.1.4) と同じ形をしているので、相対運動に関する方程式の場合でも解は式 (3.2.1), (3.2.2) の中の  $b_j, e_j, i_j, \tau_j, \phi_j$  と  $\omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) を、相対運動に関する軌道要素  $b, e, i, \tau_j, \phi$  と  $\omega$  で置き換えたものとして表される。式 (3.2.1), (3.2.2), (3.3.1) から相対運動の軌道要素は、個々の粒子の軌道要素で記述されることがわかる。

$$\begin{cases} b = b_1 - b_2, \\ e^2 = e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \cos(\tau_1 - \tau_2), \\ i^2 = i_1^2 + i_2^2 - 2i_1i_2 \cos(\omega_1 - \omega_2). \end{cases} \quad (3.3.5)$$

### 3.4 ヒル方程式の無次元化

前章で示したとおり、ヒル方程式に従う運動は相対運動と重心運動に分けることができる。この事は粒子運動の自由度を減らすことを意味する。なぜなら重心運動の一般解は求めることができるからである。さらに既に知り得ていることは、ヒル方程式がもう一つの利点 (Nakazawa et al., 1988; Hayashi et al., 1977) を持っていることである。それは、ヒル方程式が質量  $m_1 + m_2$ 、太陽中心からの距離  $a_0$ 、から独立で、なおかつ無次元化した形で書き直すことができることである。

$$\tilde{t} = t\Omega_0 \quad \text{と} \quad \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z)/a_0h. \quad (3.4.1)$$

ここで  $h$  は規格化されたヒル半径 (B.3 節) で、以下の式で表される。

$$h = \left( \frac{m_1 + m_2}{3M_\odot} \right)^{1/3}. \quad (3.4.2)$$

上記のスケーリングによって相対運動のヒル方程式 (3.3.3) は次のように表現される。

$$\begin{cases} \tilde{x}'' - 2\tilde{y}' = 3\tilde{x} - \tilde{x}/\tilde{r}^3, \\ \tilde{y}'' + 2\tilde{x}' = -\tilde{y}/\tilde{r}^3, \\ \tilde{z}'' = -\tilde{z} - \tilde{z}/\tilde{r}^3. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

プライムは  $\tilde{t}$  での微分を表す。上記の方程式の解は式 (3.2.1) と同様に求まる。

$$\begin{cases} \tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{b} - \tilde{e} \cos(\tilde{t} - \tau), \\ \tilde{y}(\tilde{t}) = -\frac{3}{2}\tilde{b}(\tilde{t} - \phi) + 2\tilde{e} \sin(\tilde{t} - \tau), \\ \tilde{z}(\tilde{t}) = \tilde{i} \sin(\tilde{t} - \omega). \end{cases} \quad (3.4.4)$$

$$\begin{cases} \tilde{x}'(\tilde{t}) = \tilde{e} \sin(\tilde{t} - \tau), \\ \tilde{y}'(\tilde{t}) = -\frac{3}{2}\tilde{b} + 2\tilde{e} \cos(\tilde{t} - \tau), \\ \tilde{z}'(\tilde{t}) = \tilde{i} \cos(\tilde{t} - \omega). \end{cases} \quad (3.4.5)$$

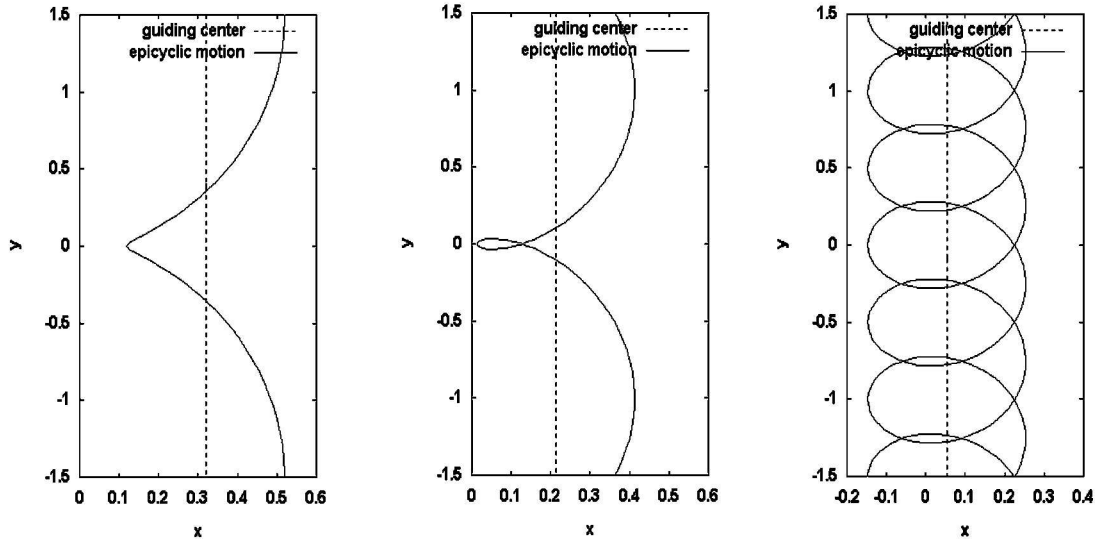


図 5: 解析解.  $\tau = 0, \phi = 0, e = 0.2$ , 左図:  $\frac{3b}{4e} = 1.2$  中図:  $\frac{3b}{4e} = 0.8$  右図:  $\frac{3b}{4e} = 0.2$

$\tilde{b}, \tilde{e}, \tilde{i}$  は相対速度に関する, ケプラー軌道の要素である. これらは以下のように表される.

$$\tilde{b} = b/a_0h, \quad \tilde{e} = e/h, \quad \tilde{i} = i/h.$$

図 (5) に初期パラメーターの違う 3 種類の解析解を示す. 軌道は離心率 0.2 の楕円であり, 内側になるほど微惑星の速度があがるため, パラメーターにもよるが, 微惑星の軌道は螺旋を描く.

上記の規格化によって, 特定の質量と太陽からの距離によって求まる軌道計算の結果は任意の距離と質量に適用出来る. このこともまた運動の自由度を下げることにつながる.

新しい変数  $\xi, \eta, \phi$  を導入したほうが便利な場合もある (Henon and Petit, 1986). この変数の利便性は Hayashi(1980) によって初めて指摘された.

$$\begin{cases} \xi = (\xi_1, \xi_2) = (\tilde{e} \cos \tau, \tilde{e} \sin \tau), \\ \eta = (\eta_1, \eta_2) = (\tilde{i} \cos \omega, \tilde{i} \sin \omega), \\ \phi = \frac{3}{2}\tilde{b}\phi. \end{cases} \quad (3.4.6)$$

上記の変数を使うと式 (3.4.4)(3.4.5) で与えられた解は以下のように書き直せる.

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \tilde{b} - \xi_1 \cos \tilde{t} - \xi_2 \cos \tilde{t}, \\ \tilde{y}(t) = -\frac{3}{2}\tilde{b}\tilde{t} + \phi + 2\xi_1 \cos \tilde{t} - 2\xi_2 \cos \tilde{t}, \\ \tilde{z}(t) = \eta_1 \sin \tilde{t} + \eta_2 \cos \tilde{t}. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

および

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \xi_1 \sin \tilde{t} - \xi_2 \cos \tilde{t}, \\ \tilde{y}'(t) = -\frac{3}{2}\tilde{b} + 2\xi_1 \cos \tilde{t} + 2\xi_2 \sin \tilde{t}, \\ \tilde{z}'(t) = \eta_1 \cos \tilde{t} - \eta_2 \sin \tilde{t}. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

この変換された解は  $\tilde{b}$  と新しい変数との間の線形関係を表している.

### 3.5 ヤコビ積分

式 (3.4.3) の方程式群で表される系にはヤコビ積分と呼ばれるエネルギー積分がある (付録 B.4 節).

$$E = \frac{1}{2}(\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2) + U(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = C = \text{const.} \quad (3.5.1)$$

ここで

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -\frac{3}{2}\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{z}^2 - \frac{3}{\tilde{r}} + \frac{9}{2}. \quad (3.5.2)$$

式 (3.5.1) から運動可能領域についての情報を得ることができる. 運動エネルギーは正であるから

$$C \geq U. \quad (3.5.3)$$

$U$  は微惑星の位置だけの関数であるから, 式 (3.5.3) は  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  のとりうる範囲, すなわち運動が可能な領域を定める.  $U = C$  となるのは, 速度が 0 ( $\tilde{x}' = \tilde{y}' = \tilde{z}' = 0$ ) とな

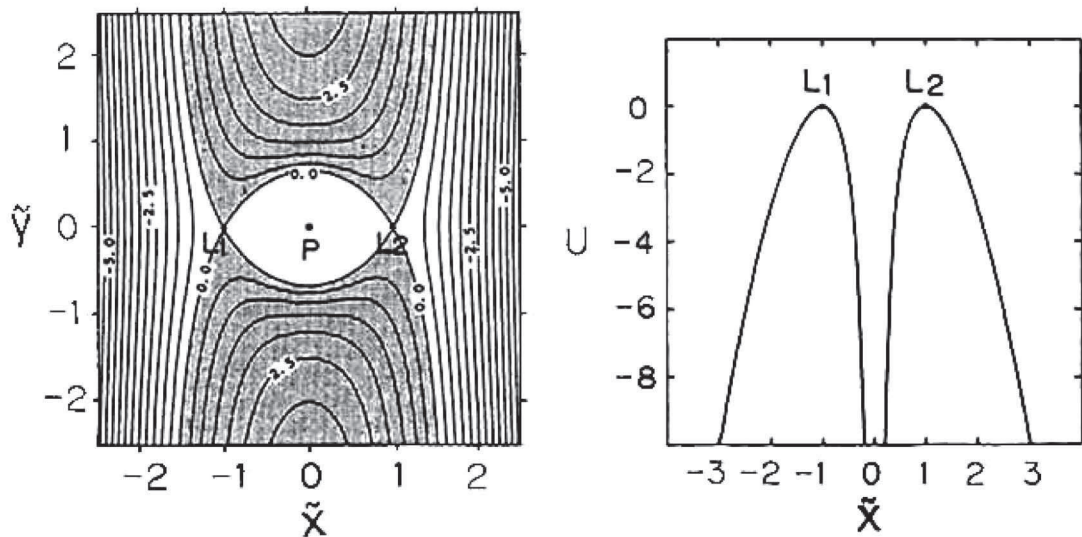


図 6: 左図は  $\tilde{z} = 0$  平面ゼロ速度曲線である. 網掛け部分は  $E > 0$  の領域を表し, 図中の数字は  $E$  の値である. 中心の空白領域は  $E < 0$ . そして,  $L_1, L_2$  点はラグランジュポイントを表す. 右図は  $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$  でのポテンシャルの  $\tilde{x}$  に関する変化を示している. (Nakazawa and Ida, 1988)

るときなので,  $U = C$  が定める3次元曲面はゼロ速度曲面と呼ばれる.  $\tilde{z} = 0$  である平面運動である時には  $U = C$  が表す曲線はゼロ速度曲線と呼ばれる.

速度 0 ( $U = E, z = 0$ ) の時の曲線を図 (6) に示す. 最小点のポテンシャル境界は  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\pm 1, 0, 0)$  である. これらの点が, 一般的な3体問題においてラグランジュポイントと呼ばれる力の作用点である. 式 (3.5.2) 中の定数  $\frac{9}{2}$  は作用点において  $U = 0$  とするために用いられている. ヤコビ積分 (3.5.1) もまた瞬間のケプラー要素で表すことができる. 相対運動の解 (3.4.4), (3.4.5) を使って,

$$E = \frac{1}{2}(\tilde{e}^2 + \tilde{i}^2) - \frac{3}{8}\tilde{b}^2 - \frac{3}{\tilde{r}} + \frac{9}{2}, \quad (3.5.4)$$

となる. ここで注意することはこの式が位相角の項を含んでいないことである.



### 3.6 まとめ

以上の様にヒル方程式では, 相対運動と重心運動を分離することができ, また, ケプラー軌道によって重心運動を解析的に記述することができる. さらに, 粒子運動の自由度の減少により式 (3.3.3) が  $m_1, m_2$  を含まなくなる. 故にその解は任意の質量比をもつ, どんなペアの粒子にも適用することができる. これらヒル方程式, ヤコビ積分の特徴から, ケプラー粒子に関する散乱の割合や, 衝突確率を得るための数学的なアプローチを行うことが可能となる.

## 付録

### A 数値積分

#### A.1 シンプレクティック数値積分法

上で述べたリープフロッグ公式はシンプレクティック数値積分法の最も簡単なものの1つである。シンプレクティック数値積分法とは、付録 (A.2) のように、数値計算法の公式を行列の形に書き換えた時、解の厳密な時間発展  $(q(t), p(t)) \rightarrow (q(t + \Delta t), p(t + \Delta t))$  がシンプレクティック変換 (正準変換, 具体的には係数行列の行列式が 1) となるような積分法のことである。その特徴を挙げる。

- 周期解をもつハミルトン系に対して使った場合に、誤差が時間に比例してしか増えない。
- エネルギーが振動するにもかかわらずまた元の値に落ち着く。このエネルギーの振動は次数を上げれば劇的に小さくすることができる。
- 計算時間が短い。
- タイムステップを変えると上のようなことが成り立たなくなる。

#### A.2 調和振動子のリープフロッグ法における保存量

##### A.2.1 導出

調和振動子におけるリープフロッグ公式

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} - \Delta t x_i \quad (\text{A.2.1})$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_{i+1/2} \quad (\text{A.2.2})$$

出発点, 終了点での公式

$$v_{1/2} = v_0 - \Delta t x_0/2 \quad (\text{A.2.3})$$

$$v_{i+1} = v_{i-1/2} - \Delta t x_i/2 \quad (\text{A.2.4})$$

このリープフロッグ公式は以下の様な形に書き直すことができる.

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_i - (\Delta t)^2 x_i / 2 \quad (\text{A.2.5})$$

$$v_{i+1} = v_i - \Delta t [x_i + x_{i+1}] / 2 \quad (\text{A.2.6})$$

この公式を式 (2.3.2) に代入して整理すると

$$H' = \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 + v_{i+1}^2) - \frac{(\Delta t)^2}{8} x_{i+1}^2 \quad (\text{A.2.7})$$

$$= \frac{1}{2}(x_i^2 + v_i^2) - \frac{(\Delta t)^2}{8} x_i^2 \quad (\text{A.2.8})$$

を導くことができる. この式から,  $(x, v)$  で与えられる位相平面上で考えると, リープフロッグ公式の解は上の式で与えられる楕円の上ののっていることがわかる. このためエネルギーの誤差がある値よりも大きくなりえない.

### A.2.2 行列を使った導出

数値計算法の表式を行列の形に書き換え, その行列の性質を調べることで数値計算法の性質を調べることができる. ここでは行列を使って, 式 (2.3.2) の導出を行う.

式 (A.2.3) から

$$v_{i+1/2} = v_i - \frac{\Delta t}{2} x_i, \quad (\text{A.2.9})$$

(A.2.9) を (A.2.2) に代入して,

$$x_{i+1} = \left(1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}\right) x_i + \Delta t v_i, \quad (\text{A.2.10})$$

(A.2.9) を (A.2.2) に代入して,

$$\frac{\Delta t}{2} x_{i+1} + v_{i+1} = v_i - \frac{\Delta t}{2} x_i. \quad (\text{A.2.11})$$

(A.2.10) (A.2.11) から,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Delta t}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} & \Delta t \\ -\frac{\Delta t}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} & \Delta t \\ -\frac{\Delta t}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} & \Delta t \\ -\Delta t + \frac{(\Delta t)^3}{4} & 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix}.$$

右辺の式から行列  $\mathbf{A}$  の固有値と固有ベクトルを求める. 特性方程式は

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - \lambda & \Delta t \\ -\Delta t + \frac{(\Delta t)^3}{4} & 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 1 + ((\Delta t)^2 - 2)\lambda + \lambda^2 = 0.$$

固有値  $\lambda$  は

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} \pm \frac{\Delta t}{2} \sqrt{(\Delta t)^2 - 4}, \quad (\text{A.2.12})$$

となる. この  $\lambda$  から  $\mathbf{A}$  の行列式は 1 となる (シンプレクティック性を持つ) ことがわかる. 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} & \Delta t \\ -\Delta t + \frac{(\Delta t)^3}{4} & 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}\right) a + \Delta t b &= \lambda a, \\ \left(1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - \lambda\right) a &= -\Delta t b. \end{aligned}$$

$\lambda$  を代入して,

$$\pm \frac{\sqrt{(\Delta t)^2 - 4}}{2} a = b.$$

$a = 1$  として  $b = \pm \sqrt{(\Delta t)^2 - 4}/2$  という 2 つの固有ベクトルを求めることができる. ( $(a, b) = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  とする) この固有ベクトルを基底ベクトルとして,

$$\begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2,$$

と表す.

$$\mathbf{A} \mathbf{a}_{1,2} = \lambda_{1,2} \mathbf{a}_{1,2}, \quad (\text{A.2.13})$$

より, 両辺に  $A^n$  をかけると

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{A}^n \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^n \mathbf{a}_1 + c_2 \lambda_2^n \mathbf{a}_2.$$

ここで,  $c_1 \lambda_1^n \cdot c_2 \lambda_2^n$  を考えると,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$  より

$$c_1 \lambda_1^n \cdot c_2 \lambda_2^n = c_1 \cdot c_2 = \text{const.} \quad (\text{A.2.14})$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{(\Delta t)^2 - 4}}{2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{(\Delta t)^2 - 4}}{2} \end{pmatrix},$$

$$x_i = c_1 + c_2,$$

$$v_i = c_1 \frac{\sqrt{(\Delta t)^2 - 4}}{2} - c_2 \frac{\sqrt{(\Delta t)^2 - 4}}{2}.$$

これより,

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( x_i + \frac{v_i}{\sqrt{\frac{(\Delta t)^2}{4} - 2}} \right),$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left( x_i - \frac{v_i}{\sqrt{\frac{(\Delta t)^2}{4} - 2}} \right).$$

ここで  $c_1 \cdot c_2 = \text{const}$  を使うと,

$$H' = \frac{1}{2}(x_i^2 + v_i^2) - \frac{(\Delta t)^2}{8} x_i^2 = \text{const.}, \quad (\text{A.2.15})$$

が導かれる.

## B ヒル方程式

### B.1 ヒル方程式の導出

3次元回転座標系の運動方程式における座標を, ヒル座標に変換してヒル方程式を導出する.

- $(X_j, Y_j, Z_j)$ : 太陽を原点とし角速度  $\Omega_0$  の回転する 3 次元座標原点で表された,  $j$  番目の粒子の座標. ( $j=1, 2$ )
- $(x_j, y_j, z_j)$ : ヒル座標系で表された,  $j$  番目の粒子の座標. ( $j=1, 2$ )

とする. 2 つの座標系の間関係式は,

$$\begin{cases} x_j = X_j - a_0, \\ y_j = Y_j, \\ z_j = Z_j. \end{cases} \quad (\text{B.1.1})$$

太陽原点の 3 次元回転座標系における物体の運動方程式は,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + 2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (\text{B.1.2})$$

$\mathbf{r}$ : 3 次元回転座標系での位置ベクトル

と表される. ここで  $\mathbf{F}$  は万有引力であり,

$$\mathbf{F} = -Gm_\odot \frac{\mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_j|^3} - Gm_j \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)}{(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|)^3}. \quad (\text{B.1.3})$$

パラメータはそれぞれ  $m_\odot$ : 太陽質量,  $\mathbf{R}_j$ :  $j$  番目の微惑星の位置ベクトル,  $\mathbf{R}_j$ : 微惑星同士の相対ベクトルを表す.

式(B.1.2)を,  $X_j, Y_j, Z_j$  について書き下し, 式(B.1.1)で変換する.

まず,  $X_j$  成分について

- 右辺第 1 項目:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= -Gm_\odot \frac{X_j}{|\mathbf{R}|^3} - Gm_j \frac{(X_i - X_j)}{(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|)^3}, \\ &= -Gm_\odot \frac{x_j + a_0}{|\mathbf{R}|^3} - Gm_j \frac{(x_i - x_j)}{(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|)^3}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

ここで,

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}|^3 &= \left\{ \sqrt{(x_j + a_0)^2 + y_j^2 + z_j^2} \right\}^3, \\ &= \left\{ a_0^2 \left[ 1 + 2\frac{x_j}{a_0} + \left(\frac{x_j}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y_j}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{z_j}{a_0}\right)^2 \right] \right\}^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

$a_0 \gg X$  を使って,

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}|^3 &\simeq \left\{ a_0^2 \left[ 1 + 2\frac{x_j}{a_0} \right] \right\}^{\frac{3}{2}}, \\ &= a_0^3 \left( 1 + 3\frac{x_j}{a_0} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

さらに

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{R}|^3} &= \frac{1}{a_0^3 \left( 1 + 3\frac{x_j}{a_0} \right)}, \\ &\simeq \frac{1}{a_0^3} \left( 1 - 3\frac{x_j}{a_0} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

と変換する. 結局右辺第1項目は,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x_j} &= -\frac{Gm_\odot}{a_0^3} \left( 1 - 3\frac{x_j}{a_0} \right) (x_j + a_0) - Gm_j \frac{(x_i - x_j)}{(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|)^3}, \\ &= -\Omega_0^2 (x_j + a_0) + 3\Omega_0^2 x_j + 3\frac{\Omega_0^2 x_j^2}{a_0} - Gm_j \frac{(x_i - x_j)}{(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|)^3}, \\ &\quad (Gm_\odot m_j / a_0^2 = m_j a_0 \Omega_0). \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

- 右辺第2項目:

$$\{2(\dot{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\Omega}_0)\}_{x_j} = 2\dot{Y}_j \Omega_0 = 2j_j \Omega_0. \quad (\text{B.1.9})$$

- 右辺第3項目:

$$\{(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}\}_{x_j} = X_j \Omega_0^2 = (x_j + a_0) \Omega_0^2. \quad (\text{B.1.10})$$

これらをまとめると,  $x$  成分は

$$\ddot{x}_j = 3\Omega_0^2 x_j + 3\frac{\Omega_0^2 x_j^2}{a_0} - Gm_j \frac{(x_i - x_j)}{(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|)^3} + 2j_j \Omega_0.$$

$Y_j$  成分,  $Z_j$  成分についても同様. 結局, ヒル方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{x}_j - 2\Omega_0 y_j &= 3\Omega_0^2 x_j + 3\frac{\Omega_0^2 x_j^2}{a_0} - Gm_j \frac{(x_i - x_j)}{(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|)^3}, \\ \ddot{y}_j + 2\Omega_0 \dot{x}_j &= \quad + 3\frac{\Omega_0^2 y_j^2}{a_0} - Gm_j \frac{(y_i - y_j)}{(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|)^3}, \\ \ddot{z}_j &= -\Omega_0^2 z_j + 3\frac{\Omega_0^2 z_j^2}{a_0} - Gm_j \frac{(z_i - z_j)}{(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|)^3}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.11})$$

の形で表される. それぞれの式の右辺第2項は2次の微小量なので無視する.

## B.2 ヒル方程式の解

$$\ddot{x}_j - 2\Omega_0 \dot{y}_j = 3\Omega_0^2 x_j + \frac{\nu_i}{r^3}(x_i - x_j), \quad (\text{B.2.1})$$

$$\ddot{y}_j + 2\Omega_0 \dot{x}_j = \frac{\nu_i}{r^3}(y_i - y_j), \quad (\text{B.2.2})$$

$$\ddot{z}_j = -\Omega_0^2 z_j + \frac{\nu_i}{r^3}(z_i - z_j). \quad (\text{B.2.3})$$

上記のヒル方程式の解を求める. 微惑星同士の相互作用項は無視する.

式(B.2.1) と式(B.2.2) を連立させ, 式(B.2.3) はそのまま解く.

$$x_j(t) = B_j - A_j \cos(\Omega_0 t - \alpha_j), \quad (\text{B.2.4})$$

$$y_j(t) = -(3/2)B_j \Omega_0 t + C_j + 2A_j \sin(\Omega_0 t - \alpha_j), \quad (\text{B.2.5})$$

$$z_j(t) = D_j \sin(\Omega_0 t - \beta_j). \quad (\text{B.2.6})$$

積分定数  $A_j, B_j, C_j, D_j, \alpha_j, \beta_j$  については以下

- 式(B.2.4)

$x_j$  の摂動  $A_j \cos(\Omega_0 t - \alpha_j)$  は,  $A_j$  の最大振幅で振動する. よって

$$A_j = e_j a_0,$$

となる. またこの時,

$$\cos[\Omega_0(t - \tau_j)] = 1 \quad (\tau_j = \alpha_j/\Omega_0).$$

この  $\tau$  はケプラー軌道の近日点を通過する時刻であり, 近点通過時刻という.

- 式(B.2.6)

$D_j$  は  $z_j$  の最大振幅なので, 軌道傾斜角  $i_j$  を使って,

$$\begin{aligned} D_j &= a_0 \sin i_j, \\ &\simeq a_0 i_j, \end{aligned}$$



と表せる. また,  $\Omega_0 = \beta$  の時,  $z = 0$ . よって  $\beta$  は昇交点経度<sup>5</sup>である.

結局, 運動方程式の解は

$$\begin{cases} x_j(t) = b_j - e_j a_0 \cos[\Omega_0(t - \tau_j)], \\ y_j(t) = -\frac{3}{2}b_j(\Omega_0 t - \phi_j) + 2e_j a_0 \sin[\Omega_0(t - \tau_j)], \\ z_j(t) = i_j a_0 \sin(\Omega_0 t - \omega_j). \end{cases} \quad (\text{B.2.7})$$

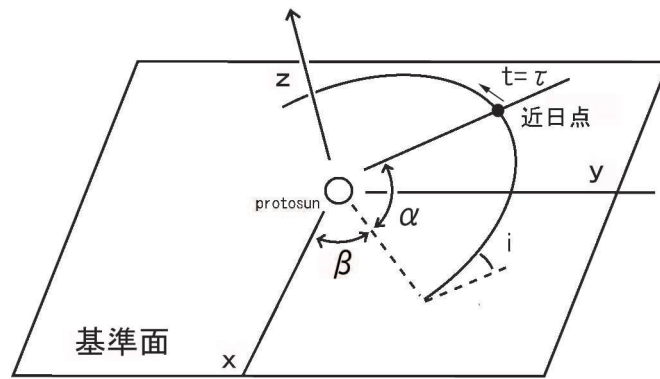


図 7: (井田茂, 比較惑星学, 1997)

### B.3 ヒル半径

$P_1$  の摂動を受けながら,  $P_2$  の周りを運動している微小天体がいつまでも  $P_2$  近傍に留まりうる最大領域をヒル圏という. わかりやすくいえば図 (6) のゼロ速度曲線である. ヒル圏外にいた天体がヒル圏の中に入ったとしても, いつまでもヒル圏内に留まり続けるというわけではない.

$P_2$  の質量が小さい時ヒル圏は円で近似できその半径は

$$r_H = \left( \frac{m_2}{3m_1} \right)^{\frac{1}{3}} d, \quad (\text{B.3.1})$$

である. この  $r_H$  をヒル半径という.  $P_3$  に働く潮汐力  $R_2$  とケプラー力  $K_2$  が等しくなる位置は

<sup>5</sup>惑星軌道が黄道面と重なる点の, 基準軸からの経度

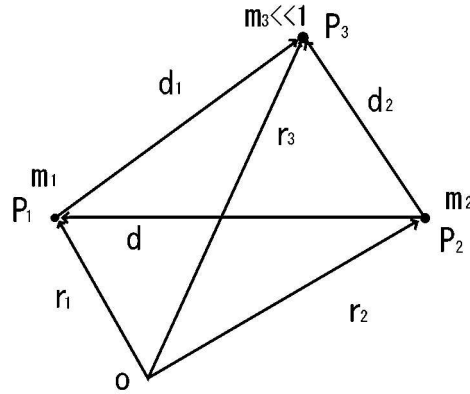


図 8:  $P_i$ : 微惑星,  $r_i$ : 位置ベクトル,  $m_i$ : 質量 (木下宙, 1998)

$$\frac{Gm_2}{d_2^2} = Gm_1 \frac{d_2}{d_3}, \quad (\text{B.3.2})$$

より

$$d_2 = \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{3}} d, \quad (\text{B.3.3})$$

である.  $(1/3)^{1/3} \approx 0.7 \approx 1$  と近似するとヒル圏内では近似的に潮汐力がケプラー力より小さいとみなせる.

#### B.4 ヤコビ積分の導出

相対運動方程式 (3.4.3) に  $\tilde{x}'$ ,  $\tilde{y}'$ ,  $\tilde{z}'$  を各々掛け合わせて和をとると,

$$\tilde{x}'\tilde{x}'' + \tilde{y}'\tilde{y}'' + \tilde{z}'\tilde{z}'' = 3\tilde{x}'\tilde{x} - \tilde{z}'\tilde{z} - (\tilde{x}'\tilde{x} + \tilde{y}'\tilde{y} + \tilde{z}'\tilde{z})/\tilde{r}^3. \quad (\text{B.4.1})$$

両辺  $t$  で積分すると

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}(\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2), \quad (\text{B.4.2})$$

$$\text{右辺} = \frac{3}{2}\tilde{x}'^2 - \frac{1}{2} - \int (\tilde{x}'\tilde{x} + \tilde{y}'\tilde{y} + \tilde{z}'\tilde{z})/\tilde{r}^3 dt. \quad (\text{B.4.3})$$

積分部分は

$$\begin{aligned}\int \sim dt &= \int \frac{\partial(1/\tilde{r})}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial(1/\tilde{r})}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(1/\tilde{r})}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} dt, \\ &= \frac{3}{\tilde{r}} + C.\end{aligned}\tag{B.4.4}$$

これらより

$$E = \frac{1}{2}(\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2) - \frac{3}{2}\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{z}^2 - \frac{3}{\tilde{r}} = C = \text{const.},\tag{B.4.5}$$

が導かれる.

## 参考文献

- [1] Hayashi, C., Nakazawa, K. and Adachi, I., 1977: Long-Term Behavior of Planetesimals and the Formation of the Planets, *Publ.Aston.Soc.Jpn.* **29**, 163 .
- [2] Henon, M. and Petit, J.-M., 1986: series expansion for encounter - type solutions of Hill's problem, *Celestial Mech.* **38**, 67 .
- [3] Hill, G.W., 1878: Researches in the Lunar Theory, *Am. J. Math.* **1**, 5; 129; 245 .
- [4] 堀源一郎, 1988: 天体力学講義, 東京大学出版会
- [5] 井田茂・小久保英一郎, 1999: 一億個の地球, 岩波書店
- [6] 木下宙, 1998: 天体と軌道の力学, 東京大学出版会
- [7] Nakazawa, K. and Ida, S., 1988:Hill's approximation in the three-body problem, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **96**, 167
- [8] Nakazawa, K., Ida, S. and Nakagawa, Y., 1989: Collisional probability of planetesimals revolving in the solar gravitational field . Basic Information, *Aston. Astrophys.* **220**, 293 .
- [9] Nakazawa, K., Ida, S. and Nakagawa, Y., 1989: Collisional probability of planetesimals revolving in the solar gravitational field . The validity of the two-body approximation, *Aston. Astrophys.* **221**, 301 .
- [10] Nakazawa, K., Ida, S. and Nakagawa, Y., 1989: Collisional probability of planetesimals revolving in the solar gravitational field , *Aston. Astrophys.* **224**, 303 .
- [11] 牧野淳一郎 他, 2001: N体シミュレーション 晩夏の学校教科書, 国立天文台
- [12] 松井孝典, 1997: 地球惑星科学 12 比較惑星学, 岩波書店
- [13] Petit, J.-M. and Henon, M., 1987: *Aston. Astrophys.* **173**, 389 .
- [14] Szebehely, V., 1967: *Theory of orbit* (Academic Press, New York), p.16 .
- [15] 渡辺尚貴, 1995: Symplectic 数値積分法入門, ウェブサイト  
<http://www-cms.phys.s.u-tokyo.ac.jp/naoki/CIPINTRO>