

(3) 粒子間衝突

CL_{xy}, CL_{xyN}

まず、カテゴリ- x に属する粒子が、カテゴリ- y に属する粒子に衝突併合されることで、 x の混合比 $q_x = N_{tx}\bar{m}_x/\bar{\rho}$ が減る（あるいは y の混合比 q_y が増える）レート CL_{xy} を一般的に求める¹。

直径 D_y の y 粒子が相対速度 $|U_x(D_x) - U_y(D_y)|$ で直径 $D_x \sim D_x + dD_x$ の x 粒子を掃き集めた場合、その y 粒子の単位時間当たりの質量増加分（単位体積あたり）は、

$$\frac{\pi}{4} (D_x + D_y)^2 E_{xy}(D_x, D_y) |U_x(D_x) - U_y(D_y)| m_x(D_x) n_{x0} e^{-\lambda_x D_x} dD_x \quad (5.59a)$$

ここで、 $\frac{\pi}{4} (D_x + D_y)^2$ は衝突断面積。 $E_{xy}(D_x, D_y)$ は x 粒子と y 粒子が衝突したときの捕捉率。 $n_{x0} e^{-\lambda_x D_x}$ は x 粒子の単位体積中のサイズ分布密度関数で、 $\lambda_x = 1/\bar{D}_x$, $n_{x0} = N_x \lambda_x = N_x/\bar{D}_x$ である。

これを、 x 粒子の全サイズで積分すれば、一つの y 粒子の質量増加分が得られる。それをさらに y 粒子の単位体積中の全サイズにわたって積分すれば、単位体積中の y 粒子の総質量増加レートが得られるから、 CL_{xy} は一般に以下のように書き下せる：

$$CL_{xy} = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\pi}{4} (D_x + D_y)^2 E_{xy}(D_x, D_y) |U_x(D_x) - U_y(D_y)| m_x(D_x) n_{x0} e^{-\lambda_x D_x} dD_x \right) n_{y0} e^{-\lambda_y D_y} dD_y \quad (5.59b)$$

この積分を以下の近似を用いて行う。

- $E_{xy}(D_x, D_y) = \text{一定}^2$.
- $|U_x(D_x) - U_y(D_y)| \approx \sqrt{(\bar{U}_x - \bar{U}_y)^2 + \alpha \bar{U}_x \bar{U}_y}$. ここで $\bar{U}_x, \bar{U}_y$ は質量の重みをつけた平均落下速度。
 $\alpha = 0.04$ とする。 $\alpha = 0$ とすると $\bar{U}_x \sim \bar{U}_y$ のときに CL_{xy} を著しく過小評価してしまう。
- $m_x(D_x) = \frac{\pi}{6} \rho_x D_x^3$.

すると解析的に積分できて³、

$$CL_{xy} = \pi^2 E_{xy} \sqrt{(\bar{U}_x - \bar{U}_y)^2 + \alpha \bar{U}_x \bar{U}_y} \frac{\rho_x}{\bar{\rho}} n_{x0} n_{y0} \left(\frac{5}{\lambda_x^6 \lambda_y} + \frac{2}{\lambda_x^5 \lambda_y^2} + \frac{0.5}{\lambda_x^4 \lambda_y^3} \right). \quad (5.62)$$

同様にして、カテゴリ- x に属する粒子が、カテゴリ- y に属する粒子に衝突併合されることによる数密度の変化率 (x 粒子の数密度の減少率) CL_{xyN} は、

$$\begin{aligned} CL_{xyN} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\pi}{4} (D_x + D_y)^2 E_{xy} |U_x(D_x) - U_y(D_y)| n_{x0} e^{-\lambda_x D_x} n_{y0} e^{-\lambda_y D_y} dD_x dD_y \\ &= \frac{\pi}{2} E_{xy} \sqrt{(\bar{U}_x - \bar{U}_y)^2 + \alpha \bar{U}_x \bar{U}_y} n_{x0} n_{y0} \left(\frac{1}{\lambda_x^3 \lambda_y} + \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_x \lambda_y^3} \right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

¹ N_{tx} : x 粒子の総数密度。単に N_x とも書かれる。

$\bar{m}_x$: x 粒子の平均質量。

$\bar{\rho}$: 空気密度。

² 本来は E_{xy} には粒径依存性がある。水野量 p65 参照。

³ 積分公式: $\int_0^\infty x^\beta e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{\beta+1}} \left(= \frac{n!}{\lambda^{n+1}}, \text{ if } \beta = n \in Z \right)$.

雲粒・雲氷粒子が降水粒子(雨、雪、霰)に捕捉される場合

カテゴリー x に属する粒子が雲粒・雲氷 (= 粒径が小さく落下速度も小さい) カテゴリー y に属する粒子が降水粒子 (= 粒径が大きく落下速度も大きい) の場合に、 CL_{xy} は簡単に書き下せる。

一般的な式 (5.59b) において近似：

- $D_x \ll D_y \implies D_x + D_y \simeq D_y$.
- $U_x \ll U_y \implies U_y - U_x \simeq U_y$.
- 表 5.1 より、 $U_y(D_y) = \alpha_{uy} D_y^{\beta_{uy}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2}$. ここで ρ_0 は地表面における空気密度。
- 捕捉率 E_{xy} は平均的な値として $\bar{E}_{xy} = Stk^2 / (Stk + 0.5)^2$. ここで、 Stk は雲粒と降水粒子の平均粒径から求めたストークス数⁴で、例えば $Stk = \frac{\rho_w \bar{D}_x^2 \bar{U}_y}{9\mu D_y}$ で与える。
- 雲粒・雲氷の粒径分布密度関数は単分散を仮定 (しなくてもよい?) $n_x(D_x) = N_x \delta(D_x - \bar{D}_x)$.

すると、

$$CL_{xy} = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\pi}{4} D_y^2 \bar{E}_{xy} U_y(D_y) m_x(D_x) n_x(D_x) dD_x \right) n_{y0} e^{-\lambda_y D_y} dD_y \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{4} \bar{E}_{xy} \frac{1}{\rho} \int_0^\infty m_x(D_x) n_x(D_x) dD_x \int_0^\infty D_y^2 \alpha_{uy} D_y^{\beta_{uy}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} n_{y0} e^{-\lambda_y D_y} dD_y \\ &= \frac{\pi}{4} \bar{E}_{xy} q_x n_{y0} \alpha_{uy} \Gamma(3 + \beta_{uy}) \lambda_y^{-(3+\beta_{uy})} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.65)$$

⁴ストークス数の意味するところは、 $Stk = \frac{\text{粒子の流れ場に対する応答時間 } \tau_V}{\text{流れ場の変化の特性時間 } \tau_F}$

$$\begin{cases} Stk \ll 1 & \rightarrow \text{粒子の運動は流れ場に追従: } \bar{E}_{xy} \rightarrow 0 \text{ (} Stk \rightarrow 0 \text{)} \\ Stk \gg 1 & \rightarrow \text{粒子の運動は流れ場と独立: } \bar{E}_{xy} \rightarrow 1 \text{ (} Stk \rightarrow \infty \text{)} \end{cases}$$

ストークス流を仮定すると、粒子の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = 3\pi\mu D(u - v)$$

ここで μ は流体の粘性率、 u は流速、 D は粒子直径。これから

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u - v}{3\pi\mu Dm}$$

したがって、

$$\tau_V \sim 3\pi\mu Dm = \frac{\rho_d D^2}{18\mu}$$

ここで ρ_d は粒子の密度。また、流れ場の変化の特徴的スケールを L とすると

$$\tau_F \sim \frac{L}{u}$$

従って、ストークス流においてストークス数は

$$Stk = \frac{\tau_V}{\tau_F} \sim \frac{\rho_d D^2 u}{\mu L}$$

と与えられる。

過冷却の雨滴が氷晶と衝突して凍結し、霰になる場合

カテゴリー x に属する粒子が雨滴、カテゴリー y に属する粒子が氷晶（雲氷）の場合に、 CL_{xy} すなわち CL_{ri} を書き下す。 CL_{ri} は、雨滴混合比の減少率（霰混合比の増加率）である。

一般的な式 (5.59b) において近似、

- 氷晶（雲氷）のサイズは単分散、すなわち $D_{y=i} = \bar{D}_i$, $U_{y=i} = \bar{U}_i$.
- $\bar{D}_i \ll D_{x=r} \implies D_r + \bar{D}_i \simeq D_r$
- $U_i \ll U_{x=r} \implies U_r - \bar{U}_i \simeq U_r$.
- 表 5.1 より、 $U_r(D_r) = \alpha_{ur} D_r^{\beta_{ur}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2}$
- $m_r(D_r) = \frac{\rho_w \pi D_r^3}{6}$
- 捕捉率 E_{ri} は一定。
- 過冷却雨滴と氷晶が衝突する時、0 付近の比較的暖かい層においては、凍結速度は熱収支で決まるため 1 タイムステップで完全に凍結しない場合もありうるが、瞬時に凍結すると仮定。

すると、

$$CL_{ri} = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\pi}{4} D_r^2 E_{ri} U_r(D_r) m_r(D_r) n_{r0} e^{-\lambda_r D_r} dD_r \right) n_i(D_i) dD_i \quad (5.67a)$$

$$= \frac{\pi}{4} E_{ri} \frac{1}{\rho} \int_0^\infty n_i(D_i) dD_i \int_0^\infty D_r^2 \alpha_{ur} D_r^{\beta_{ur}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\rho_w \pi D_r^3}{6} n_{r0} e^{-\lambda_r D_r} dD_r$$

$$= \frac{\pi^2 \rho_w}{24 \rho} E_{ri} N_i n_{r0} \alpha_{ur} \Gamma(6 + \beta_{ur}) \lambda_r^{-(6+\beta_{ur})} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad (5.67b)$$

数密度の変化率、すなわち雨滴の数密度の減少率 CL_{riN} は、同様に、

$$CL_{riN} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\pi}{4} D_r^2 E_{ri} U_r(D_r) n_{r0} e^{-\lambda_r D_r} dD_r \right) n_i(D_i) dD_i \quad (5.68a)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\pi}{4} E_{ri} N_i D_r^2 \alpha_{ur} D_r^{\beta_{ur}} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} n_{r0} e^{-\lambda_r D_r} dD_r \quad (5.68b)$$

$$= \frac{\pi}{4} E_{ri} N_i n_{r0} \alpha_{ur} \Gamma(3 + \beta_{ur}) \lambda_r^{-(3+\beta_{ur})} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad (5.68c)$$

式 (5.68b) 中の被積分関数は、単位時間単位体積あたりに直径 $D_r \sim D_r + dD_r$ の過冷却雨滴が氷晶と衝突する総個数（総回数）を示すもので、図 5.5 に異なる N_i に対してプロットされている。

雲氷の数濃度 N_i 大きく、大粒の雨滴が多い（ D_r 大） $\implies$ 過大評価になる場合がある！
要注意！！

これは、求めた CL_{ri} , CL_{riN} が単に単位時間に氷晶と衝突する雨滴の質量を積算した混合比や衝突回数を示しているに過ぎず、複数回の衝突をカウントしてしまっているため。一度衝突して霰になると 2 回目以降の衝突で新たに霰を生成することはない。

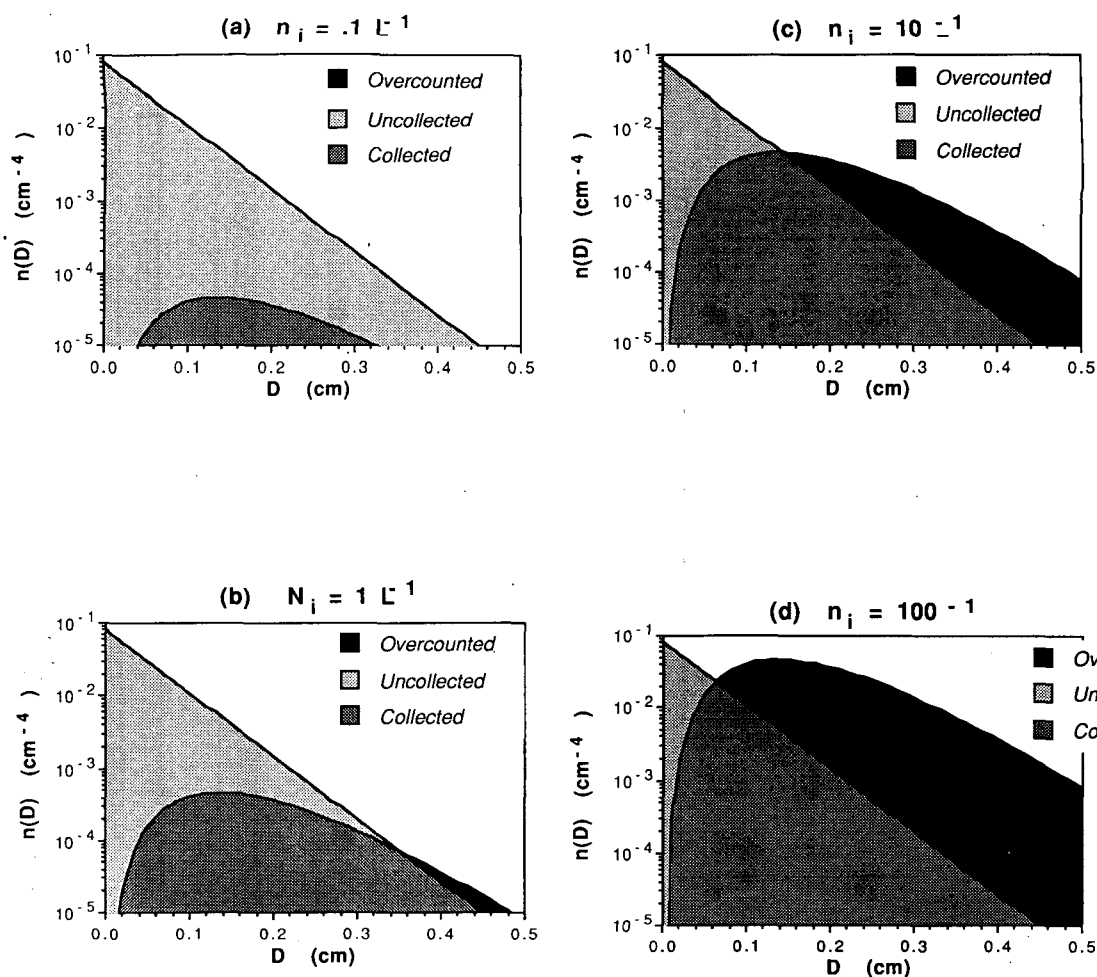


FIG. 1. The freezing of an exponential ($\alpha_r = 0$) raindrop size distribution with $n_{0r} = 0.08 \text{ cm}^{-4}$ and $\lambda_r = 20 \text{ cm}^{-1}$ resulting from the collection of small ice crystals is shown for ice number concentrations of (a) 0.1 L^{-1} , (b) 1 L^{-1} , (c) 10 L^{-1} , and (d) 100 L^{-1} . Light shading denotes those raindrops that do not collect any ice crystals; medium shading indicates those raindrops that do collect ice crystals, as properly represented by (4.19) and (4.23); and dark shading shows the overcounting of the larger raindrops, as represented by the traditional collection equations of (4.16) and (4.17). Calculations assume $E_{ri} = 1$, $\gamma = 1.2$, and $\Delta t = 10 \text{ s}$. In (a) D_{rp} is not defined because $n_{ri} < 1$ for all drop sizes. Values of D_{rp} in (b)–(d) are 0.36 cm, 0.14 cm, and 0.06 cm, respectively.

図 5.5: Ferrier(1994) より。

霰の雲粒・雲氷・雪・雨滴捕捉成長

● 乾燥成長

霰に付着した過冷却水全てが瞬時に凍結する場合。このときの霰混合比増加率は

$$PG_{dry} = CL_{cg} + CL_{rg} + CL_{ig} + CL_{sg} \quad (5.69)$$

ただし、氷同士の捕捉率（付着率）は低いため、霰と衝突する雲氷・雪はほとんど成長に寄与しない。つまり CL_{ig} と CL_{sg} はかなり小さい。

● 湿潤成長

気温が比較的高く、雲水量の多い場所

- 捕捉雲粒が凍結する際の潜熱放出ができず、一部未凍結のままで霰の表面が濡れてくる。
- 捕捉過冷却水の凍結量は熱収支で決定。一方、雲氷・雪は効率良く捕捉され成長に寄与。

このときの霰混合比増加率は

$$PG_{wet} = \frac{2\pi n_{g0} \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v (\rho_{vs}(T_0) - \rho_v)\}}{\bar{\rho} (L_f - C_w(T_0 - T))} VENT_g + (CL'_{ig} + CL'_{sg}) \left(1 + \frac{C_i(T_0 - T)}{L_f - C_w(T_0 - T)}\right) \quad (5.70)$$

で与えられる。

第1項 ... 通風効果を考慮した霰表面からの顕熱・潜熱輸送の収支から決まる凍結量 (Appendix 参照)。

第2項 ... 捕捉される雲氷・雪の量と、それらの温度 T と霰表面温度 $T_0 = 0$ の差 ($T_0 > T$) による顕熱輸送によって決まる凍結量。

ここで、 k_a は空気熱伝導率、 L_v は蒸発の潜熱、 D_v は水蒸気の拡散係数、 $\rho_{vs}(T_0)$ は温度 T_0 における飽和水蒸気密度、 ρ_v は水蒸気密度、 L_f は融解の潜熱、 C_w は水の比熱、 $VENT_g$ は通風係数項、 CL'_{ig} 、 CL'_{sg} はそれぞれ湿潤成長の霰による氷晶・雪の衝突捕捉速度。

乾燥成長 or 湿潤成長？

$$\begin{cases} PG_{dry} \leq PG_{wet} & \longrightarrow \text{乾燥成長} \\ PG_{dry} > PG_{wet} & \longrightarrow \text{湿潤成長} \end{cases}$$

雲氷同士の凝集による数密度の減少率

数密度減少率の一般式 (5.63) において、 $x = y = i$, 相対速度をサイズに依らず $U_i X$ (X は落下速度のスペクトル分散)、 $E_{ii} = \text{一定}$ とする。さらに二重カウントを除くと、雲氷同士の凝集による数密度の減少率は

$$\begin{aligned} AG_{Ni} &= -\frac{1}{2} \times \frac{\pi E_{ii} U_i X}{2} n_{i0}^2 \frac{3}{\lambda_i^4} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \pi \bar{D}_i^2 E_{ii} U_i X \times N_i^2 \\ &= -\frac{1}{2} K_I N_i^2 \end{aligned} \quad (5.71)$$

ここで、

$$K_I = \frac{3}{2} \pi \bar{D}_i^2 E_{ii} U_i X \quad (5.72)$$

とした⁵。表 5.1 から

$$U_i = \alpha_{ui} \bar{D}_i \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \quad (5.73)$$

これを代入すると

$$K_I = 9 \frac{q_i \bar{\rho} \alpha_{ui} E_{ii} X}{\rho_i} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \bigg/ N_i = \frac{c_1}{N_i} \quad (5.74)$$

したがって、

$$AG_{Ni} = -\frac{c_1}{2} N_i \quad (5.76)$$

雪同士の凝集による数密度の減少率

$$AG_{Ns} = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \alpha_{us} n_{s0}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty (D_1 + D_2)^2 |D_1^{\beta_{us}} - D_2^{\beta_{us}}| e^{-\lambda_s(D_1+D_2)} dD_1 dD_2 \quad (5.77)$$

⁵ 単分散で計算すると $K_I = \pi \bar{D}_i^2 E_{ii} U_i X$. いづれにしてもテキストと係数が合わない?

A 霰の湿潤成長における凍結量

表面温度 $T_0 (=0)$ 、半径 a の霰に、温度 $T (< T_0)$ の過冷却水が付着した際の凍結増加率およびそれによる霰混合比増加率 (式 5.70 の右辺第一項) を導出する。

- 過冷却水は霰の表面に一様に付着すると仮定。
- 時間 Δt の間に Δa だけ霰 (凍結部分) が成長すると考える。
- 大気のも温度も T 。
- 時間 Δt で大気中に捨て去られる熱量を Q_{out} 、凍結に伴って正味捨て去る必要のある熱量を Q_n として、熱収支

$$Q_{out} = Q_n \quad (A.1)$$

によって凍結レートを決定する。

Q_{out}

Q_{out} は、強制対流 (伝導) と蒸発の 2 つの過程の寄与を考える。

大気への熱伝導 (?) を考えると伝わる熱量は

$$4\pi a^2 \times k_a \frac{T_0 - T}{a} \times \Delta t = 4\pi a k_a (T_0 - T) \Delta t. \quad (A.2)$$

蒸発レートは定常を仮定して

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi a^2 D_v \frac{d\rho}{dr} = 4\pi a D_v (\rho_v - \rho_{vs}) \quad (A.3)$$

で与えられるから⁶、蒸発によって持ち去られる熱量 (蒸発潜熱の分) は

$$-L_v \frac{dm}{dt} \times \Delta t = 4\pi a L_v D_v (\rho_{vs} - \rho_v). \quad (A.4)$$

これら 2 つを足し、さらに通風効果を考慮するために無次元の通風効果係数 $\bar{f}$ を掛けることで Q_{out} が得られる:

$$Q_{out} = 4\pi a \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v (\rho_{vs} - \rho_v)\} \bar{f} \Delta t. \quad (A.5)$$

Q_n

凍結により発生する潜熱の一部は顕熱として取り去ってくれるので、正味取り去られなければならない熱量 Q_n は、

$$Q_n = 4\pi a^2 \Delta a \times \rho_w \{L_f - C_w(T_0 - T)\} \quad (A.6)$$

一つの霰の成長率: dM/dt

熱収支 $Q_{out} = Q_n$ より、

$$\frac{4\pi a^2 \Delta a \rho_w}{\Delta t} = \frac{4\pi a \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v (\rho_{vs} - \rho_v)\} \bar{f}}{L_f - C_w(T_0 - T)}. \quad (A.7)$$

左辺は一つの霰の成長率 dM/dt をあらわしているから、

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi a \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v (\rho_{vs} - \rho_v)\} \bar{f}}{L_f - C_w(T_0 - T)}. \quad (A.8)$$

⁶定常解は、 $\frac{d\rho}{dr} = \frac{a}{r^2}(\rho_v - \rho_{v,a})$

霰混合比増加率: $PG_{wet,1}$

全てのサイズにわたって霰の成長率を足し合わせると霰の総質量増加率がもとまる：

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dM}{dt}(D_g)n_{g0}e^{-\lambda D_g}dD_g &= \int_0^\infty \frac{2\pi D_g \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v(\rho_{vs} - \rho_v)\}}{L_f - C_w(T_0 - T)} \bar{f} n_{g0}e^{-\lambda D_g}dD_g \\ &= \frac{2\pi n_{g0} \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v(\rho_{vs} - \rho_v)\}}{L_f - C_w(T_0 - T)} \frac{\bar{f}}{\lambda_g^2} \end{aligned} \quad (A.9)$$

これを $\bar{\rho}$ で割れば霰混合比増加率となり、

$$PG_{wet,1} = \frac{2\pi n_{g0} \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v(\rho_{vs} - \rho_v)\}}{\bar{\rho} \{L_f - C_w(T_0 - T)\}} \frac{\bar{f}}{\lambda_g^2}. \quad (A.10)$$

通風係数項 $VENT_g$ を $\bar{f}/\lambda_g^2$ とすれば

$$PG_{wet,1} = \frac{2\pi n_{g0} \{k_a(T_0 - T) + L_v D_v(\rho_{vs} - \rho_v)\}}{\bar{\rho} \{L_f - C_w(T_0 - T)\}} VENT_g. \quad (A.11)$$

となり、(式 5.70 の右辺第一項) が導出された。