(4) 新しいカテゴリへの変換

ここでは新しいカテゴリへの変換項

- 雲水から雨水への変換 (CN_{cr}) (Tripoli and Cotton, 1980) [1]
- 雲氷から雪への変換 (CN_{is}) (Murakami, 1990) [2]
- 雪から霰への変換 (CN_{sg}, CN_{sgN}) (Murakami, 1990)

および

- 雨粒と雪との衝突にともなう霰の生成確率 $(1-\alpha_{rs})$ (Murakami, 1990)

の定式化について説明する.

(a) 雲水から雨水への変換

雲水から雨水への変換項 CN_{cr} は, 雲粒どうしが衝突併合し雨粒サイズへ成長することを表した項である. 雲粒どうしが衝突する際に併合を起こすかどうかは, 異なるサイズの微小な水滴どうしの捕捉率 $E_{cc}(R,r)$ を調べることでわかる. これを示した図 5.6 (Rogers and Yan, 1989, Fig 8.3) である. この図によると, 片方の水滴の直径 R が 40 μm 以下の場合 $E_{cc}(R,r)$ は非常に小さいことがわかる.

この結果と Bery (1968), Bery and Reinhardt (1974) に基づき, CN_{cr} は以下のように与えられる (Tripoli and Cotton, 1980; 付録参照).

$$CN_{cr} = \frac{0.104 g E_{cc} \overline{\rho}^{\frac{4}{3}}}{\mu (N_c \rho_w)^{\frac{1}{3}}} q_c^{\frac{7}{3}} h(q_c - q_{cm}) \tag{5.80}$$

ここで $h(q_c - q_{cm})$ はヘビサイド関数, μ は空気の粘性率, $E_{cc} = 0.55$, q_m は雲水から雨水への変換が生じる臨界雲水混合比で

$$q_m = \frac{\rho_w}{6\overline{\rho}} D_{cm}^3 N_c \tag{5.81}$$

で与えられる. ここで D_{cm} は雲粒の臨界平均直径である. D_{cm} の値としては通常 20 μm 程度の値が用いられる.

[1]Tripoli and Cotton, 1980: *J. Appl. Meteorol.*, **19**, 1037.
[2]Murakami, 1990: *J. Meteor. Soc. Japan*, **68**, 107.

(b) 雲氷から雪への変換

雲氷から雪への変換は, 雲氷の昇華凝結成長 (雲氷が拡散成長して雪になる) と雲氷のどうしの凝集によって生じる. それぞれの過程による変換項を CN_{is}^D, CN_{is}^A と表すと,

$$CN_{is} = CN_{is}^D + CN_{is}^A$$

である. 昇華凝結成長による変換 CN_{is}^D, 凝集による変換 CN_{is}^A はそれぞれ以下のように表す.

$$CN_{is}^D = \frac{q_i}{\Delta t_{is,1}} \qquad (5.84)$$

$$CN_{is}^A = \frac{q_i}{\Delta t_{is,2}} \qquad (5.86)$$

ここで, $\Delta t_1, \Delta t_2$ はそれぞれの過程の特徴的な時間スケールである.

$\Delta t_{is,1}$ は, 初期に半径 $\overline{r_i}$ の雲粒が拡散成長によって雪のカテゴリに分類される氷晶粒子の最小半径 r_{s0} まで成長するのにかかる時間として与える[3].

$$\Delta t_{is,1} = \frac{r_{s0}^2 - (\overline{r_i})^2}{2(S_I - 1)\left[\frac{L_s^2}{\kappa R_w T^2} + \frac{1}{\overline{\rho} q_{VSI}(T) D_V}\right]^{-1}}\rho_i \qquad (5.82)$$

ここで S_I は氷の飽和蒸気圧 $q_{VSI}(T)$ を用いた飽和比, L_s は氷の潜熱, R_w は単位質量の水蒸気に対する気体定数, κ は熱拡散係数, D_V は水蒸気の拡散係数, ρ_i は氷の密度である.

$\Delta t_{is,2}$ は, 初期に半径 $\overline{r_i}$ の雲氷が凝集によって半径 r_{s0} の雪に成長するのにかかる時間として与える. ρ_i を一定とすると, これは雲氷の数濃度が N_i から $N_i(r_i/r_{s0})^3$ に減少するに必要な時間に等しい. (5.76) 式によって凝集による雲氷数濃度の変化は

$$\frac{dN_i}{dt} = -\frac{c_1}{2}N_i$$

と与えているので, これを用いて

$$\Delta t_{is,2} = -\frac{2}{c_i}\ln\left(\frac{\overline{r_i}}{r_{s0}}\right)^3 \qquad (5.85)$$

とする[4].

---

[3]拡散成長する半径 r の球形雪粒の質量 m の時間変化は以下のように与えられる.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4\pi r(S_I - 1)}{\frac{L_s^2}{\kappa R_w T^2} + \frac{1}{\overline{\rho} q_{VSI}(T) D_V}}.$$

$m = 4\pi r^3 \rho_i/3$ とし, r について $\overline{r_i}$ から r_{s0} まで積分すると (5.82) が得られる.

[4]原文は符号に誤りがある

(c) 雪から霰への変換

雪は過冷却雲粒を捕捉して成長し, その密度を増加させながら霰に変化する. しかしここでは雪の密度は予報変数ではないので, 雪から霰への変換項を雪の密度変化に基づいて表現することはできない. そこで, 雪から霰への変換は, 温度が 273 K 以下のときに雲粒捕捉による雪から霰への変換率 (ここでは CN_{sg}^{cl} と表す) が昇華凝結による水蒸気から雪への変率 (VD_{vs}) よりも大きくなると生じると仮定する (Murakami, 1990).

混合比の変換率

雲粒捕捉による雪混合比から霰混合比への変換率 CN_{sg}^{cl} は (5.84), (5.86), のように

$$CN_{sg}^{cl} \propto \frac{q_s}{\Delta t_{sg}}$$

の形式で表す. ここで Δt_{sg} は雪が霰に成長する特徴的な時間スケールである. Δt_{sg} の雪粒直径依存性を考慮すると,

$$\begin{aligned} CN_{sg}^{cl} &= \frac{1}{\overline{\rho}}\int_0^\infty \frac{m_s(D_s)n_s(D_s)}{\Delta t_{sg}(D_s)}\,dD_s, \\ &= \frac{1}{\overline{\rho}}\int_0^\infty \frac{\rho_s\frac{\pi}{6}D_s^3 n_{s0}\exp(-\lambda_s D_s)}{\Delta t_{sg}(D_s)}\,dD_s \end{aligned}$$

となる. ここで $m_s(D_s)$ は直径 D_s の雪の質量である.

雲粒捕捉による直径 D_s の雪粒の成長率は (5.64), (5.65) より

$$\begin{aligned} \frac{dm_s(D_s)}{dt} &= \frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}\overline{\rho}q_c U_s(D_s) \\ &= \frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}\overline{\rho}q_c \alpha_{us} D_s^{\beta_{us}}\left(\frac{\rho_0}{\overline{\rho}}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

と表される. $dm_s = (\rho_g - \rho_s)\pi D_s^3/6$ となる時間を $\Delta t_{sg}(D_s)$ とすると,

$$\Delta t_{sg}(D_s) = \frac{(\rho_g-\rho_s)\frac{\pi}{6}D_s^3}{\frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}\overline{\rho}q_c\alpha_{us}D_s^{\beta_{us}}(\rho_0/\overline{\rho})^{1/2}} \tag{5.87}$$

と表される[5]. これを用いると,

$$\begin{aligned} C_{sg}^{sl} &= \frac{1}{\overline{\rho}}\int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}\overline{\rho}q_c\alpha_{us}D_s^{\beta_{us}}(\rho_0/\overline{\rho})^{1/2}}{(\rho_g-\rho_s)\frac{\pi}{6}D_s^3}\rho_s\frac{\pi}{6}D_s^3 n_{s0}\exp(-\lambda_s D_s)\,dD_s \\ &= \int_0^\infty \frac{\rho_s}{\rho_g-\rho_s}\frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}q_c\alpha_{us}D_s^{\beta_{us}}(\rho_0/\overline{\rho})^{1/2}n_{s0}\exp(-\lambda_s D_s)\,dD_s \\ &= \frac{\rho_s}{\rho_g-\rho_s}CL_{cs}. \end{aligned}$$

[5] 原文では分母の $\overline{\rho}, (\rho_0/\overline{\rho})^{1/2}$ が落ちている.

全体の変換率はこれと CL_{cs} との和になるで表される.

$$
\begin{aligned}
CN_{sg} &= CL_{cs} + CN_{sg}^{cl} \\
&= CL_{cs}\frac{\rho_g}{\rho_g - \rho_s}.
\end{aligned}
\tag{5.88}
$$

数濃度の変換率

雲粒捕捉による雪数濃度から霰数濃度への変換率 CN_{sgN} は CN_{sg}^{cl} の場合と同様に考え, 以下のように与える.

$$
\begin{aligned}
CN_{sgN} &= \int_0^\infty \frac{n_s(D_s)}{\Delta t_{sg}(D_s)}\, dD_s \\
&= \int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}\overline{\rho} q_c \alpha_{us} D_s^{\beta_{us}} (\rho_0/\overline{\rho})^{1/2}}{(\rho_g - \rho_s)\frac{\pi}{6}D_s^3} n_{s0}\exp(-\lambda_s D_s)\, dD_s \\
&= \int_0^\infty \frac{3E_{cs} q_c \alpha_{us} D_s^{\beta_{us}-1} (\rho_0 \overline{\rho})^{1/2}}{2(\rho_g - \rho_s)} n_{s0}\exp(-\lambda_s D_s)\, dD_s \\
&= \frac{3E_{cs} q_c \alpha_{us} (\rho_0 \overline{\rho})^{1/2}}{2(\rho_g - \rho_s)} \Gamma(\beta_{us})\lambda^{1-\beta_{us}} n_{s0}
\end{aligned}
\tag{5.89}
$$

(d) 雨粒と雪との衝突にともなう霰の生成確率

雨粒と雪との衝突にともなう霰の生成確率 $(1-\alpha_{rs})$ は, 以下のように与える

$$
1 - \alpha_{rs} = 1 - \frac{\overline{m_s}^2}{\overline{m_s}^2 + \overline{m_r}^2}. \tag{5.90}
$$

ここで $\overline{m_r}, \overline{m_s}$ は雨粒と雪の平均質量である.

付録 A: (5.80) 式の導出

Tripoli and Cotton (1980) にしたがって (5.80) 式の導出を行う.

CN_{cr} は以下の形で表されると仮定する.

$$CN_{cr} = \frac{q_c}{\Delta t_{cr}} h(q_c - q_{cm}) \tag{A.1}$$

ここで Δt_{cr} は雲粒どうしの衝突併合により雨粒へ成長する特徴的な時間である. Δt_{cr} は終端速度で落下する雲粒が, 1 つの雲粒と衝突し併合するまでにかかる時間として与える.

$$\pi \overline{r_c}^2 V_c \Delta t_{cr} N_c E_{cc} = 1. \tag{A.2}$$

よって

$$\frac{1}{\Delta t_{cr}} = \pi \overline{r_c}^2 V_c N_c E_{cc}. \tag{A.3}$$

ここで $\overline{r_c}$ は雲粒の平均半径, V_c は雲粒の終端速度, N_c は雲粒の数密度, E_{cc} は雲粒どうしの捕捉率である. このとき CN_{cr} は

$$CN_{cr} = \pi \overline{r_c}^2 V_c N_c E_{cc} q_c h(q_c - q_{cm}) \tag{A.4}$$

となる.

終端速度はストークスの式

$$V_c = \frac{2}{9} \frac{\rho_w g \overline{r_c}^2}{\mu} \tag{A.5}$$

で与え, 平均半径を

$$\overline{r_c} = \left(\frac{3\overline{\rho} q_c}{4\pi N_c \rho_w} \right)^{1/3} \tag{A.6}$$

と与える. この場合, CN_{cr} は

$$\begin{aligned} CN_{cr} &= \frac{2}{9} \frac{\pi \rho_w g}{\mu} \overline{r_c}^4 N_c E_{cc} q_c h(q_c - q_{cm}) \\ &= \frac{2}{9} \frac{\pi \rho_w g}{\mu} \left(\frac{3\overline{\rho} q_c}{4\pi N_c \rho_w} \right)^{4/3} N_c E_{cc} q_c h(q_c - q_{cm}) \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{3}{4} \right)^{4/3} \pi^{-1/3} \frac{g E_{cc} \overline{\rho}^{4/3}}{\mu (N_c \rho_w)^{1/3}} q_c^{7/3} h(q_c - q_{cm}) \\ &= \frac{0.104 g E_{cc} \overline{\rho}^{4/3}}{\mu (N_c \rho_w)^{1/3}} q_c^{7/3} h(q_c - q_{cm}) \end{aligned} \tag{A.7}$$

と表される.

付録 B: (5.88) 式についての考察

(5.88) 式は,「雪から霰へと変換される数濃度の変化率 × 霰の質量」として表すことができるはずである. 以下ではそれを確認する.

雪から霰へと変換される数密度の変化率は, (5.89) 式を導出した際の考察により,

$$CN_{sgN} = \frac{q_s/m_s}{\Delta t_{sg}} = \frac{n_s}{\Delta t_{sg}}$$

と表される. これに m_g をかけ $\overline{\rho}$ で割ったものが CN_{sg} と考える.

$$CN_{sg} = \frac{n_s m_g}{\overline{\rho}\Delta t_{sg}} \tag{B.1}$$

$n_s, m_g, \Delta t_{sg}$ は粒子直径 D_s に依存することを考慮すると,

$$\begin{aligned}
CN_{sg} &= \frac{1}{\overline{\rho}}\int_0^\infty \frac{n_s(D_s)m_g(D_s)}{\Delta t_{sg}(D_s)}\,dD_s \\
&= \frac{1}{\overline{\rho}}\int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}\overline{\rho}q_c\alpha_{us}D_s^{\beta_{us}}(\rho_0/\overline{\rho})^{1/2}}{(\rho_g-\rho_s)\frac{\pi}{6}D_s^3}\frac{\pi}{6}D_s^3\rho_g n_{s0}\exp(-\lambda_s D_s)\,dD_s \\
&= \int_0^\infty \frac{\rho_g}{\rho_g-\rho_s}\frac{\pi}{4}D_s^2 E_{cs}q_c\alpha_{us}D_s^{\beta_{us}}(\rho_0/\overline{\rho})^{1/2}n_{s0}\exp(-\lambda_s D_s)\,dD_s \\
&= \frac{\rho_g}{\rho_g-\rho_s}CL_{cs}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

となって, (5.88) 式が得られる.