

3 The Restricted Three-Body Problem

3.1 Introduction

前章にて重力相互作用する2つの物体は、相対運動を考えた場合、閉じた楕円軌道を描くことを示した。この章では3体の物体が重力相互作用をした場合の運動について考える。

3体目の物体の質量が、他の2体の運動に影響を及ぼさないほど小さい場合、この3体目の物体の運動について考えることを、制限3体問題(the circular, restricted, three-body problem)という。また、2体が同一平面上で円運動をしている場合を、円制限3体問題、楕円運動している場合を楕円制限3体問題という。このように制限を設けても3体問題を解くことはできないが、こうすることで太陽系の天体の運動を、近似的にはあるが、比較的簡単に理解することができるようになる。

この章では円制限3体問題について扱う。まず3体問題の運動方程式を記述し、惑星の位置や、力の平衡点についての考察を行う。また、粒子の軌道と Jacobi 積分と呼ばれるエネルギー積分の値の関係を図示する。さらに粒子が1つの質量の周りでの運動を Hill 方程式を用いて表し、その運動について調べる。最後は抵抗が働く場合の3体問題についての考察を行う。

3.2 Equations of Motion

無視できるほど小さな質量を持つ粒子が、質量 m_1, m_2 を持つ2つの物体からの重力を受けながら運動している状況を考える。また、2つの物体は共通重心の周りを円運動しているものとし、粒子の質量は物体の運動には影響しないものとする。

ξ, η, ζ の軸をもち、座標原点を2つの物体の重心にとる座標系を考える (3.2)。 ξ 軸は、 $t = 0$ のときの、 m_1 から m_2 に向かう線上にとり、 η 軸は ξ 軸に垂直で2つの物体の作る軌道面内に存在するようにとる。また ζ 軸は $\xi - \eta$ 平面に垂直で、2つの物体の作る角運動量ベクトルの方向にとるものとする。物体の座標はそれぞれ $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ とし、距離は一定、共通重心の周りを同じ角速度で円運動しているとする。また、単位質量を $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$ となるようにとる。ここで、 $m_1 > m_2$ とし、また

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.1)$$

と定義すると、物体の質量 m_1, m_2 に重力定数を掛けた値 μ_1, μ_2 は、以下のように表される。

$$\mu_1 = gm_1 = 1 - \bar{\mu} \quad \text{and} \quad \mu_2 = gm_2 = \bar{\mu}. \quad (3.2)$$

単位長さは2つの物体の距離とする。慣性系(inertial system) 若しくは、sidereal system

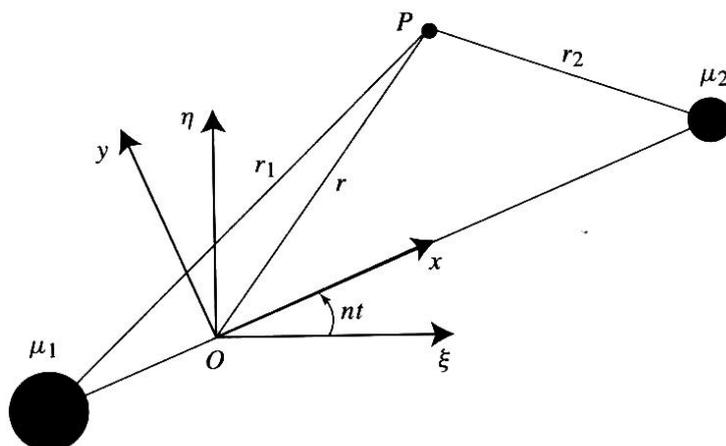


図 3.1: sidereal 座標系 (ξ, η, ζ) と synodic 座標系 (x, y, z) の関係. P は粒子, 原点 O は 2 体の重心, ζ, z は回転軸に一致する. また矢印は正方向を表す.

における粒子の座標を (ξ, η, ζ) とすると, 粒子の運動方程式は以下のようになる.

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (3.3)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (3.4)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \quad (3.5)$$

また, 図 (3.2) より

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2, \quad (3.6)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2, \quad (3.7)$$

である. 2つの物体が円軌道を描くとしたので, その距離と角速度 n は一定である. この場合, 粒子の運動は固定された 2つの質点の周りの運動と考えることができる. また, 物体と共に円運動をするような座標系を考えれば, 物体は固定しているものとして扱うことができる. ここで, 原点は同じで, $t = 0$ では ξ, η, ζ 軸と一致し, ζ 軸について平均運動 n で回転する座標系を考える. x 軸は共通重心の周りを円運動する物体同士を結ぶ直線上にとり, m_1, m_2 の座標はそれぞれ, $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$, $(x_2, y_2, z_2) = (-\mu_1, 0, 0)$ とする. よって, 式 (3.2), 図 3.2 を書き換えて

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \quad (3.8)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2. \quad (3.9)$$

このような (x, y, z) は回転座標系, 若しくは synodic system という. これらの座標系は以下の式で関係付けられる.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

今使っている単位系では $n = 1$ であるが, あえて n を明示しておく. 式 (3.16) ~ (3.18) で遠心力を強調するためである.

式 (3.10) の各成分を 2 階微分すると以下の 2 式を得る.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

この座標系の変換により, 運動方程式中に Coriolis 項 (the Coriolis's acceleration, nx, ny) と遠心力 (the centrifugal acceleration, n^2x, n^2y) が生じる. これらの式を使って, 式 (3.3) ~ (3.5) の運動方程式を書き換えると,

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin nt = \\ \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos nt + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin nt, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt = \\ \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin nt + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos nt, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \quad (3.15)$$

式 (3.13) と $\cos nt$ との積と式 (3.14) と $-\sin nt$ の積との和をとり, 同様に式 (3.13) と $-\sin nt$ との積と式 (3.14) と $\cos nt$ の積との和をとって, 両辺足し合わせると, synodic 系

における粒子の運動方程式を得ることができる.

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right] \quad (3.16)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y, \quad (3.17)$$

$$\ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \quad (3.18)$$

これらの運動方程式はスカラー関数 U を使って以下のように書き直すこともできる.

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.19)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.20)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3.21)$$

$U = U(x, y, z)$ は以下で与えられる.

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}. \quad (3.22)$$

$(x^2 + y^2)$ は遠心力によるポテンシャル, $1/r_1, 1/r_2$ の項が重力によるポテンシャルを示す. 特に物理学では慣習的にポテンシャルを負の量として扱うので $U^* = -U$ の置き換えをして, 運動方程式を表す.

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = - \frac{\partial U^*}{\partial x}, \quad (3.23)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = - \frac{\partial U^*}{\partial y}, \quad (3.24)$$

$$\ddot{z} = - \frac{\partial U^*}{\partial z}. \quad (3.25)$$

また, U は真のポテンシャルではない. U は回転系での粒子の運動方程式を表現するのにもっとも都合の良い関数である, というだけである. このポテンシャルを偽ポテンシャルという.

3.3 The Jacobi Integral

式 (3.19) と \dot{x} , 式 (3.20) と \dot{y} , 式 (3.21) と \dot{z} をそれぞれ積をとって加え合わせると,

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt}. \quad (3.26)$$

上式は積分できて,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J \quad (3.27)$$

C_J は積分定数. $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$ として,

$$v^2 = 2U - C_J \quad (3.28)$$

式 (3.22) を使うと,

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 \quad (3.29)$$

これらのことから, $2U - v^2 = C_J$ は, この運動における定数であることがわかる. C_J を Jacobi 積分 (the Jacobi integral) と呼ぶ. これはエネルギー積分ではないことに注意する. なぜなら制限 3 体問題ではエネルギーも角運動量も保存しないからである. Jacobi 積分は円制限 3 体問題における単なる積分定数にすぎない.

C_J はまた, 3.1 節での (ξ, η, ζ) の座標系を使っても表現できる. 式 (3.10) を使って,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - n\dot{y} \\ \dot{y} + n\dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

である. しかし,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - n\dot{y} \\ \dot{y} + n\dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

であるので, 故に,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

式 (3.33) から,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\
 &= (\dot{\xi} \ \dot{\eta} \ \dot{\zeta}) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n(\dot{\xi} \ \dot{\eta} \ \dot{\zeta}) \mathbf{A}^T \mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\
 &\quad - n(\xi \ \eta \ \zeta) \mathbf{B}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} + n^2(\xi \ \eta \ \zeta) \mathbf{B}^T \mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\
 &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + n^2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + 2n(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

\mathbf{A}^T , \mathbf{B}^T は \mathbf{A} , \mathbf{B} の転置行列を示す. \mathbf{A} , \mathbf{B} は共に直交行列であるため, 逆行列は, 単純に, 自身の転置行列である. また, 系が回転するだけでは距離は変化しないので, $x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ から式 (3.29) を使って,

$$C_J = 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) + 2n(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \dot{\zeta}^2 \tag{3.36}$$

となる. これは以下のような形に書き換えることもできる.

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}C_J \tag{3.37}$$

$\mathbf{n} = (0, 0, n)$ であり, 上式の左辺は粒子の単位質量あたりの全エネルギーとなる. 2.9 節より, 摂動力が働く場合は \mathbf{h} が一定でないことがわかっているので, 制限 3 体問題ではエネルギーが保存しない.

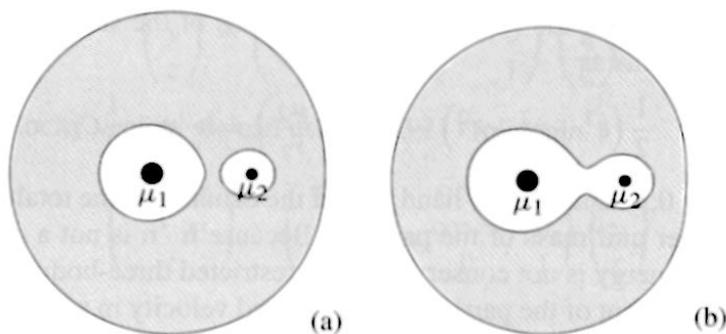


図 3.2: 2 種類の Jacobi 定数におけるゼロ速度曲線. k のとき $\mu_2 = 0.2$ である. C_J の値は (a) $C_J = 3.9$, (b) $C_J = 3.7$.

各座標系での粒子の位置と速度は Jacobi 積分の値で判断することができる。2 体問題では、角運動量とエネルギー積分を使って相対運動の方程式を解くことができた。しかし、制限 3 体問題で、Jacobi 積分を使ってわかることは粒子が存在できない領域の評価である。

Jacobi 積分の性質として、粒子の速度が 0 となる領域を評価できる。この場合、

$$2U = C_J \quad (3.38)$$

$$n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) = C_J \quad (3.39)$$

この曲面はゼロ速度曲面として知られていて、粒子の運動に制約を与える。これを $x - y$ 平面について考えてみる。この場合ゼロ速度曲面は曲線となる。図 3.3 は $\mu_2 = 0.2$ 、平均運動 $n = 1$ としている。式 (3.27) の Jacobi 積分より常に $2U \geq C_J$ である。故に式 (3.39) より、粒子の存在可能な領域を決めることができる。このことは、3 次元座標においても成立する。図 (3.3) の網掛けの領域は、粒子が存在することのできない領域を表している。図 (3.3a) において、もし、ある C_J の値を持つ粒子が μ_1 の質量を持つ物体の周りの網掛けでない領域内で軌道運動を行っているとする、粒子は μ_2 を回る軌道や、網掛け領域を通過する軌道を取ることはできない。同様に図 (3.3b) のような場合は、粒子が μ_1 の周りで軌道運動している状態から、 μ_2 軌道へ移ることもありうる。しかし、網掛けでない領域から逃げることはできない。これを Hill の安定性(Hill's stability) という。

3.4 Tisserand Relation

半長軸 a 、離心率 e 、軌道傾斜角 I を持つ彗星について考えてみる。また、この彗星が木星に接近して離れていった後の軌道要素を a' 、 e' 、 I' とする。この 2 組の軌道要素は、Jacobi 積分といくつかの近似を行うことで関連付けることができる。Jacobi 積分、 $C_J = 2U - v^2$ 、は接近の間は定数である。3 次元慣性座標系では、彗星は位置ベクトル $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ 、速度 $\mathbf{r} = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ を持つ。このような系では、式 (3.37) を使って Jacobi 積分を書くことができる。

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}C_J \quad (3.40)$$

r_1, r_2 はそれぞれ、木星からの彗星の距離である。単位長さ、単位角速度として木星の半長軸、平均運動を使う。また、木星と彗星の質量は太陽のそれよりも十分小さいとする。

$$g(m_{Sun} + m_{comet}) \approx g(m_{Sun} + m_{Jupiter}) = 1 \quad (3.41)$$

$m_{Sun}, m_{comet}, m_{Jupiter}$ はそれぞれ、太陽、彗星、木星の質量である。太陽-彗星間の 2 体問題におけるエネルギー積分は式 (eq:2.34)¹ より、

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad (3.42)$$

¹式 (2.34): $v^2 = \mu(2/r - 1/a)$

$\mu = 1$ とし, 彗星, 木星の質量は太陽のそれよりも十分小さいとすると $r_1 \approx r$ となる. 彗星の単位質量あたりの角運動量は以下で与えられる.

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.43)$$

ζ 方向の角運動量成分は

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = h \cos I. \quad (3.44)$$

ここで, $h^2 = a(1 - e^2)$ である. さらに式 (3.40) の形から

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos I = \frac{2}{r} - 2\mu_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) - C_J \quad (3.45)$$

と変形できる. ここで, 彗星が木星から遠いとする, $1/r_2$ は微量となり, μ_2 の項を無視することができて,

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1 - e^2)} \cos I \approx \text{constant}. \quad (3.46)$$

よって, 木星接近前後の軌道要素の関係は, 近似的に次式のように与えられる.

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1 - e^2)} \cos I = \frac{1}{2a'} + \sqrt{a'(1 - e'^2)} \cos I' \quad (3.47)$$

この式は Tisserand の判定式 (Tisserand relation, Tisserand 1896) として知られ, 新しく発見された彗星が, 以前に発見され惑星によって軌道を変えられたものかどうかを判定するのに使われる.

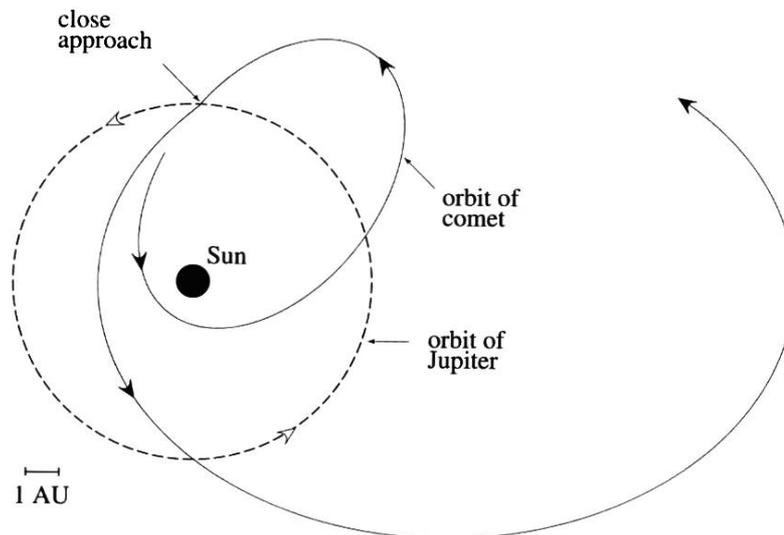


図 3.3: 木星に接近した仮想彗星の軌道変化. 接近により彗星の軌道が大きく変化している.

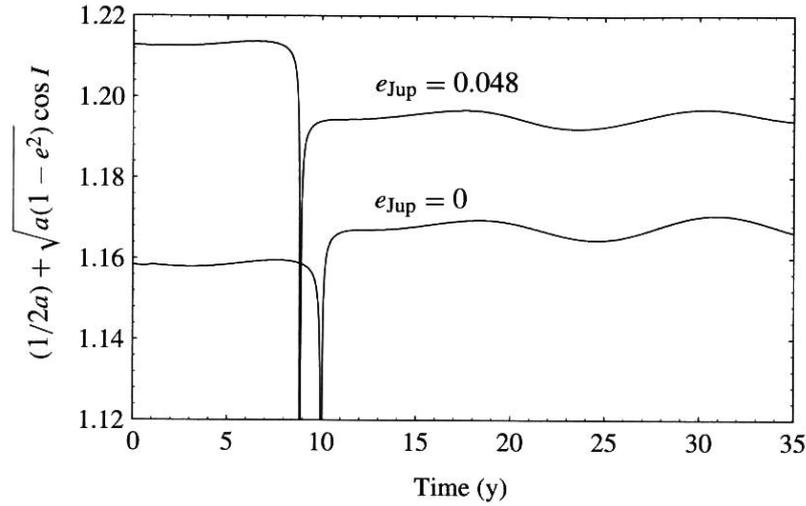


図 3.4: $e_{Jup} = 0, e_{Jup} = 0.048$ における Tisserand 定数の変化. 積分時間は 35 年.

木星に接近した仮想彗星軌道の例を図 3.4 に示す. この場合, 木星への接近により, 彗星の半長軸が 8AU ほど大きくなっている. この彗星の初めの軌道要素は $a = 4.81\text{AU}$, $e = 0.763$, $I = 7^\circ.47$, 接近後の起動要素は $a = 10.8\text{AU}$, $e = 0.731$, $I = 21^\circ.4$ である. Tisserand の判定式は単に Jacobi 積分の近似値というだけではなく, 木星が円軌道を公転していると仮定したときに得られる値である. しかし, $\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)}\cos I$ は, 木星の離心率が 0 でないとしても近似的にはあるが定数である. この量の時間発展を図 3.4 に示した. 下は木星の離心率を 0 (円軌道), 上の実線は正しい値 0.048 とした時の Tisserand の定数である. 近似のきかなくなる接近時の値を除けば, 前者では 1 また, 接近後の値は木星のケプラー周期 12 年の周期をもって変化している.

図 3.4 に示した彗星の軌道変化の理論は, ボイジャー, ガリレオ, カッシーニといった惑星を目指す宇宙船に応用されている. 上記の解析は円制限 3 体問題に基づいていて, エネルギーは保存されない. しかし実際の場面ではエネルギーは保存されており, 摂動惑星の半長軸の減少が起こる. 摂動惑星に対する宇宙船の質量が余りに小さいので, 惑星への効果が検出できないだけである. よって, 結局ここでの解析にあった動きをする. しかし, 太陽系の初期では主要な惑星と微惑星との接近は, オールトの雲の形成をもたらす, また, 多数の接近の蓄積は惑星軌道に大きな影響を与えたと考えられている.

3.5 Lagrangian Equilibrium Points

前節において2つの質量 m_1, m_2 が重心を中心として同じ軌道面内を平均運動 n で円運動する場合, 同じ平均運動 n で回転している座標系からみると, 2つの物体は静止して見えることを示した. この節では, 回転系において, 粒子 P が静止することのできる平衡点(equilibrium point)を見つける.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をそれぞれ, 質量 m_1 の物体, 2体の重心, 質量 m_2 の物体の位置ベクトルを表すとする. ベクトルの原点は粒子 P である(図 3.5). また, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ を P が m_1, m_2 から受ける単位質量あたりの引力とする. このとき P は回転座標系に対して静止しており, O からの距離を b とする. また P は $-b$ 方向に遠心力を受けており, 物体からの引力とバランスしている.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (3.48)$$

P は静止しているので Coriolis の力は考えなくて良い.

O の位置ベクトルは次式で与えられる.

$$\mathbf{b} = \frac{m_1 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{c}}{m_1 + m_2}, \quad (3.49)$$

これを書き換えて,

$$m_1(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m_2(\mathbf{b} - \mathbf{c}). \quad (3.50)$$

上式と $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ の外積をとると,

$$m_2(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{c}) + m_1(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

\mathbf{F}_1, \mathbf{c} と \mathbf{F}_2, \mathbf{a} はそれぞれの成す角度の符号が逆であり, 故に,

$$m_2 F_1 c = m_1 F_2 a. \quad (3.52)$$

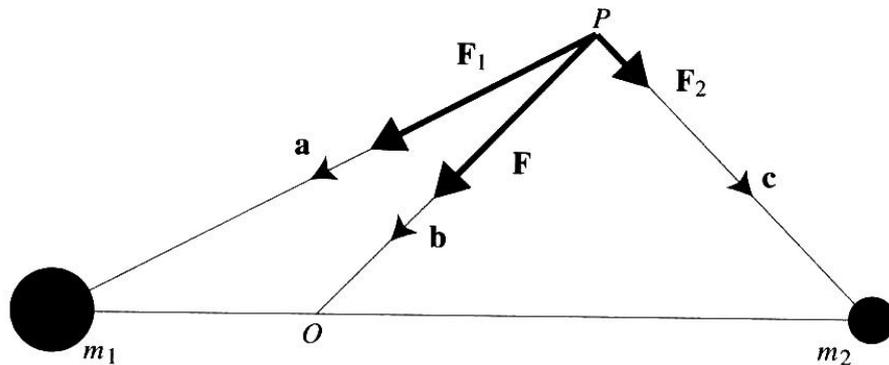


図 3.5: 粒子 P に働く, 物体 m_1, m_2 からの重力. O は物体 m_1, m_2 の重心

重力相互作用の場合, $F_1 = gm_1/a^2$, $F_2 = gm_2/c^2$ であるので式 (3.52) から $a = c$ が導かれる. つまり, 粒子と 2 物体のなす 3 角形は必ず 2 等辺 3 角形だということがわかる.

粒子 P の遠心力と単位質量当たりの物体からの引力との方程式を作ってみると,

$$n^2 b = F_1 \cos \beta + F_2 \cos \gamma. \quad (3.53)$$

β は F_1 が b となす角度, γ は F_2 が b となす角度である (図 3.6). このことから,

$$n^2 = \frac{g}{a^2 b^2} (m_1 b \cos \beta + m_2 b \cos \gamma). \quad (3.54)$$

しかし, O, P, と 2 つの物体のなす 3 角形から,

$$\begin{aligned} b \cos \beta &= a - g \cos \alpha, \\ b \cos \gamma &= a - (d - g) \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.55)$$

となる. d は m_1, m_2 間の距離, g は m_1 と O の距離である. また,

$$\cos \alpha = \frac{d}{2a}, \quad (3.56)$$

である. さらに重心の定義から,

$$g = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d, \quad d - g = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d. \quad (3.57)$$

故に式 (3.54) は

$$n^2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{a^3 b^2} \left(a^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2 \right). \quad (3.58)$$

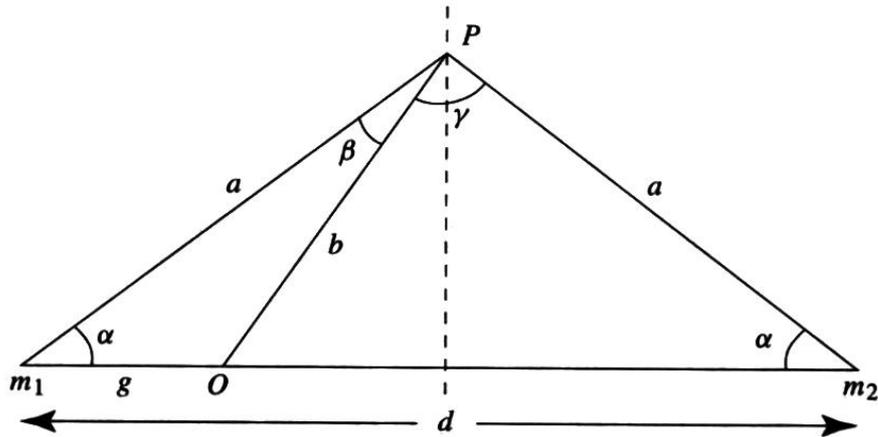


図 3.6: P が平衡点にあるときの図. 破線は m_1, m_2 を結ぶ線分の垂直 2 等分線である. これは万有引力における平衡点の位置である.

と書き直すことができる. 余弦定理より,

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2ag \cos \alpha = a^2 + g^2 - gd. \quad (3.59)$$

これを式 (3.57) に適用して,

$$b^2 = a^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2. \quad (3.60)$$

結局, 式 (3.58) は次式で表される.

$$n^2 = g(m_1 + m_2)/a^3. \quad (3.61)$$

しかし, 基準となる座標系は慣性系に対して回転しているので, Kepler の第 3 法則より,

$$n^2 = g(m_1 + m_2)/d^3, \quad (3.62)$$

ここから $a = d$ を得る.

結局, m_1, m_2 による重力が働いている系では, m_1, m_2 を底辺とする正三角形の頂点に平衡点ができることがわかる. さらに, 底辺に対して対称の位置にも平衡点が存在することがわかる. これらの点を Lagrangian equilibrium point, L_4, L_5 という. また, さらに 3 つの平衡点 L_1, L_2, L_3 が, m_1, m_2 を結ぶ直線状に存在することが知られている.

ここでは, 重力のみが存在する系での平衡点を考えたが, 重力と同様に時間に依存しない力について同じことが成り立つ. 例えば抵抗力が存在する中では, 平衡点を, 遠心力以外の合力は系の重心方向に向かうという事実を利用して決めることができる.

3.6 Location of Equilibrium Points

円制限 3 体問題は積分不可能だが, 多くの特殊解を得ることはできる. 特殊解を得るには, 粒子が回転系で静止できるような点を探せばよい. そのような点を平衡点と呼ぶことは前節で述べた. ここからは, 全ての運動は $x - y$ 平面内で起こるものとし, 前節と同様に, 単位長さを 2 つの物体の距離, 平均運動は $n = 1$ とする.

平衡点の位置の計算を簡単化するため, Brower & Clemence (1961) に従う. また U を別の形に書き換える. 式 (3.8)², (3.9)³ での r_1, r_2 の定義に, $\mu_1 + \mu_2 = 1$ を使うと,

$$\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu_1 \mu_2, \quad (3.63)$$

故に式 (3.22)⁴ より,

$$U = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2. \quad (3.64)$$

²式 (3.8): $r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2$

³式 (3.9): $r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2$

⁴式 (3.22): $U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$

この形は x, y が消去されているため、偏微分を簡単に書くことができる。また、 x, y に関わらず、 r_1, r_2 は常に正である。

式 (3.19)⁵、式 (3.20)⁶ で、 $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$ の場合について考える。平衡点を見つけるためには次の非線形方程式を解かなくてはならない。

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0. \quad (3.66)$$

U に式 (3.64) を代入して偏微分を実行する。

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{x + \mu_2}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{x + \mu_1}{r_2} = 0, \quad (3.67)$$

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{y}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{y}{r_2} = 0. \quad (3.68)$$

式 (3.65), (3.65) から、

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = \mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r_2} = \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0, \quad (3.69)$$

より、 $r_1 = r_2 = 1$ という自明な解を得ることができる。また、

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 = 1, \quad r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 = 1 \quad (3.70)$$

から、次式の2つの解を得ることができる。

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.71)$$

$r_1 = r_2 = 1$ より、この各点は、 μ_1, μ_2 を底辺とする、正三角形で定義される。これらを正三角形平衡解(Lagrangian equilibrium point)といい、前節で示した、 L_4, L_5 である。

式 (3.68) より、 $y = 0$ も式 (3.68) の解であることは明らかである。このことはこの他の平衡点が x 軸上に存在し、式 (3.65) を満たすことを示唆する。実際にこの解は、直線平衡解(collinear Lagrangian equilibrium point) L_1, L_2, L_3 と一致する。 L_1 は μ_1, μ_2 の間、 L_2 は μ_2 の外、 L_3 は x 軸の負の位置に存在する。ここからは、これら直線平衡解の位置を、近似的に求めてみる。

L_1 では、

$$r_1 + r_2 = 1, \quad r_1 = x + \mu_2, \quad r_2 = -x + \mu_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{\partial r_2}{\partial x} = 1. \quad (3.72)$$

⁵式 (3.19): $\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$

⁶式 (3.20): $\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$

となるので, 式 (3.67) に代入して,

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{(1-r_2)^2} + 1 - r_2 \right) - \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0 \quad (3.73)$$

若しくは,

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{(1-r_2+r_2^2/3)}{(1+r_2+r_2^2)(1-r_2)^3}, \quad (3.74)$$

を得る. ここで次式を定義すると,

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{1/3}, \quad (3.75)$$

r_2 を微少量としたときは, $r_2 = \alpha$ の近似が成り立つことがわかる. この α は後に Hill 方程式 (μ_2 付近での近似を使った運動方程式) を記述する際に出てくるものである. 式 (3.74) の右辺をテイラー展開して整理することで,

$$\alpha = r_2 + \frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2^3 + \frac{53}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5) \quad (3.76)$$

を得る. 2.5 節の Lagrange's inversion method を使うことで, r_2 を α の関数として表現することができる. 式 (3.76) と (2.89)⁷を比較することで,

$$r_2 = \alpha + (-1/3)\phi(r_2), \quad (3.77)$$

を得る. 関数 ϕ は次式で定義される.

$$\phi(r_2) = r_2^2 + r_2^3 + \frac{53}{27}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5). \quad (3.78)$$

この式から,

$$[\phi(\alpha)]^2 = \alpha^4 + 2\alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6), \quad (3.79)$$

$$\frac{d}{d\alpha}[\phi(\alpha)]^2 = 4\alpha^3 + 10\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5), \quad (3.80)$$

$$[\phi(\alpha)]^3 = \alpha^6 + \mathcal{O}(\alpha^7), \quad (3.81)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\phi(\alpha)]^3 = 30\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5). \quad (3.82)$$

これを式 (2.90)⁸の表現に当てはめると, r_2 の具体的な形をを求めることができる.

$$\begin{aligned} r_2 &= \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j \\ &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5). \end{aligned} \quad (3.83)$$

⁷式 (2.89): $\zeta = z + e\phi(\zeta)$ ($e < 1$)

⁸式 (2.90): $\zeta = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j$.

L_2 では,

$$r_1 - r_2 = 1, \quad r_1 = x + \mu_2, \quad r_2 = x - \mu_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = 1. \quad (3.84)$$

となるので, 式 (3.67) に代入して,

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{(1+r_2)^2} + 1 + r_2 \right) + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0 \quad (3.85)$$

若しくは

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{(1+r_2+r_2^2/3)}{(1+r_2)^2(1-r_2^3)}, \quad (3.86)$$

を得る. α の定義を使うと,

$$\alpha = r_2 - \frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2^3 + \frac{1}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5) \quad (3.87)$$

$$r_2 = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \quad (3.88)$$

となる. L_3 では,

$$r_2 - r_1 = 1, \quad r_1 = -x - \mu_2, \quad r_2 = -x + \mu_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = -1. \quad (3.89)$$

となるので, 式 (3.67) の r_2 に代入して,

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) + \mu_2 \left(-\frac{1}{(1+r_1)^2} + 1 + r_1 \right) = 0 \quad (3.90)$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(1-r_1^3)(1+r_1)^2}{r_1^3(r_1^2+3r_1+3)}. \quad (3.91)$$

ここで, $r_1 = 1 + \beta$ とすると,

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{12}{7}\beta + \frac{144}{49}\beta^2 - \frac{1567}{343}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad (3.92)$$

$$\beta = -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \quad (3.93)$$

図 3.7 で, 質量比 $\mu_2 = 0.2$, 3 つの Jacobi 定数の場合のゼロ速度曲線と, 全ての Lagrangian points を示した. 図 3.8 では, 同じ質量比における連続的に変化する C_J のゼロ速度曲線で定義される 3 次元曲面である.

図 3.7, 3.8 をみると, L_1 での Jacobi 定数が最も大きく ($C_J = 3.805$, $\mu_2 = 0.2$), 最も内側に位置している. 図 3.2 と比較すると, L_1 が, 2 物体のそれぞれを回る軌道を分ける点になっていることがわかる. L_2 ($C_J = 3.552$, $\mu_2 = 0.2$) はゼロ速度曲線のもう一つの鞍点である. $C_J < C_{L_2}$ となる粒子は, 運動可能平面の内側, 外側両方の軌道を取ることが

できる. 枝分かれしたゼロ速度がまた重なる点は $L_3(C_J = 3.197, \mu_2 = 0.2)$ の位置にも存在する. $L_4, L_5(C_J = 2.84, \mu_2 = 0.2)$ の正三角形平衡解の位置では C_J の値が最も小さい. もし, 粒子の Jacobi 定数が $C_J < C_{L_{4,5}}$ であるなら, 粒子軌道に排他領域は存在しない. これは粒子がどこにでも行けるということを意味しているのではない. 単に Jacobi 定数による運動の制限がないということを示しているに過ぎない.

Lagrangian equilibrium point の数字の順番に特に決まりは無い. 正三角形平衡解に関しては慣習的に引きずっている方を L_5 とする. ここで, 平衡点における Jacobi 定数で, 平衡点を分類してみる. 平衡点の x, y または, 上で明らかにした r_1, r_2 で式 (3.39)⁹ を級数展開することで, Jacobi 定数を計算することができる. $\mathcal{O}(\mu_2)$ まで展開すると以下の式を得る.

$$C_{L_1} \approx 3 + 3^{4/3} \mu_2^{2/3} - 10\mu_2/3, \quad (3.94)$$

$$C_{L_2} \approx 3 + 3^{4/3} \mu_2^{2/3} - 14\mu_2/3, \quad (3.95)$$

$$C_{L_3} \approx 3 + \mu_2, \quad (3.96)$$

$$C_{L_4} \approx 3 - \mu_2, \quad (3.97)$$

$$C_{L_5} \approx 3 - \mu_2. \quad (3.98)$$

式 (3.8)¹⁰, (3.9)¹¹, (3.39) は, y が $-y$ であっても同じである. 故にゼロ速度曲線は x 軸に対称となっていないわけではない. このことから, L_4, L_5 での Jacobi 定数の値は同じになる.

太陽系で最大の $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ を持つのは, Pluto-Charon であり, その大きさは $\sim 10^{-1}$ である. 地球-月では $\sim 10^{-2}$ である. しかし, その他の惑星-衛星, または太陽-惑星での μ_2 は, 少なくとももう一桁小さくなる. 故に太陽系での Lagrangian equilibrium point を考える際は, μ_2 が小さい場合を考えることが重要である.

式 (3.94), (3.95) から, $\mu_2 \rightarrow 0$ のとき $C_{L_1} \rightarrow C_{L_2}$ となる. 同様に式 (3.83), (3.88) より, $\mu_2 \rightarrow 0$ のとき, $\mathcal{O}(\alpha^2)$ より高次の項は無視できるようになる. よって L_1, L_2 は μ_2 から等距離にあることになる. L_3 は中心質量から $1 + \beta$ の位置となる. $\beta < 0$ は式 (3.93) で与えられている. さらに $\mu_2 \rightarrow 0$ のとき, L_3 は単位円に近づく. 正三角形解については既に μ_1 を中心とする単位円に接しており, 中心からの距離は $r = (1 - \mu_2 + \mu_2^2)^{1/2}$ である. μ_2 は, 質量 μ_1 と重心間の距離でもあるので, $\mu_2 \rightarrow 0$ は, 質量 μ_1 が重心に近づくことを意味している.

図 3.6 は $\mu_2 = 0.01$ (地球-月での値とほぼ同じ) の時のゼロ速度曲線と Lagrangian equilibrium point を示す. L_1, L_2 は μ_2 から, ほとんど等距離にあり, L_3 はほぼ単位円上にある. 図 3.9 中の破線は質量 μ_1 を中心とする単位円を表す. これを半径の 1% 右にずらすと, 重心を中心とする単位円と一致する.

⁹式 (3.39): $n^2(x^2 + y^2) + 2(\mu_1/r_1 + \mu_2/r_2) = C_J$

¹⁰式 (3.8): $r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2$

¹¹式 (3.9): $r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2$

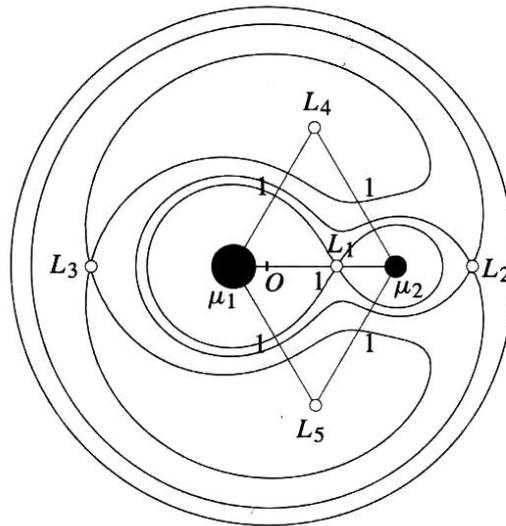


図 3.7: Lagrangian equilibrium point (白丸) の位置と $\mu_2 = 0.2$ の時のゼロ速度曲線を示す. ゼロ速度曲線は, 曲線が L_1, L_2, L_3 をそれぞれ通るときの 3 つの Jacobi 定数 (3.805, 3.552, 3.197) の場合である. また O は 2 物体の重心である.

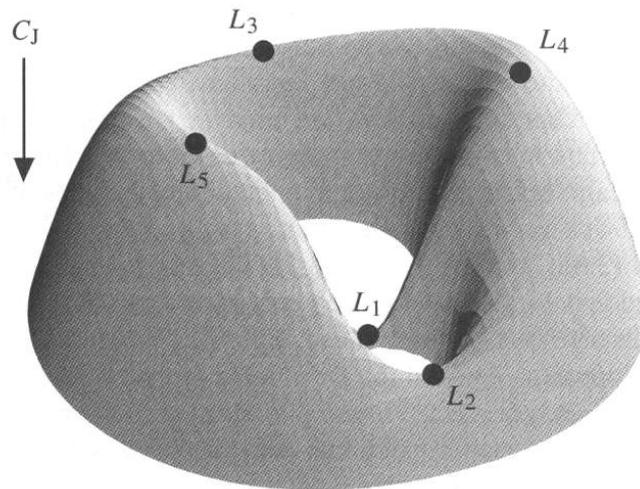


図 3.8: $C_J = 2U$ で定義される 3 次元曲面と, Lagrangian equilibrium point の位置を示す. L_1, L_2, L_3 は全て, 曲面の鞍点上に位置する. この曲面は垂直上向きが C_J の小さくなる方向である.

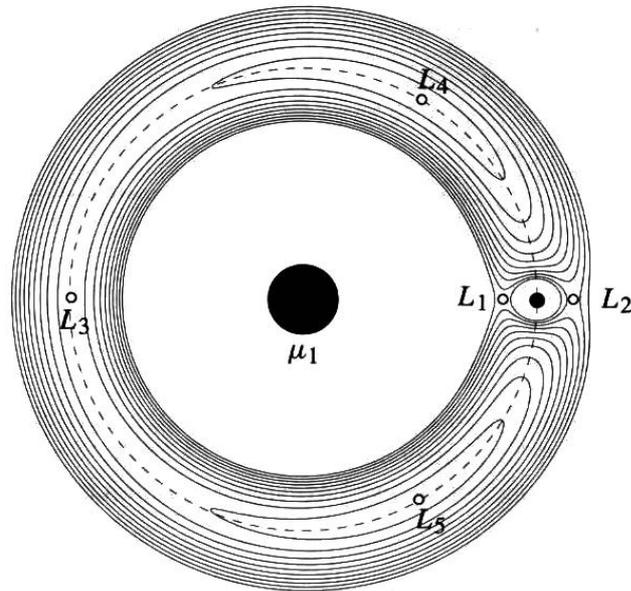


図 3.9: Lagrangian equilibrium point (白丸) の位置と $\mu_2 = 0.01$ の時のゼロ速度曲線を示す. 破線は重心を中心としたときの単位円である.

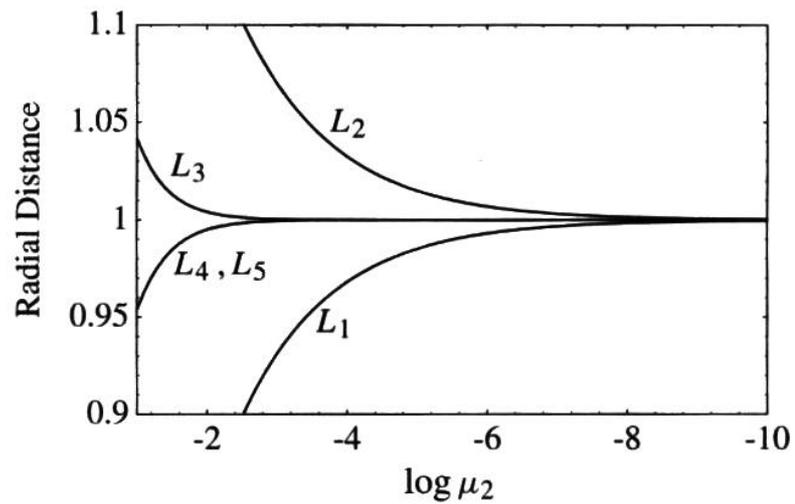


図 3.10: 5つの Lagrangian equilibrium point の重心からの距離. 横軸は μ_2 の \log をとっている.

$\mu_2 \rightarrow 0$ の時の単位円の対称性の程度を表現するため個々の平衡点の半径を, $\mu_2 = 10^{-1}$ から $\mu_2 = 10^{-10}$ において計算する (図 3.10). その結果, まず L_3, L_4, L_5 が, それから L_1, L_2 が単位円の半径に収束していくことがわかる. ゼロ速度曲線と平衡点のこのような性質は質量比が小さい場合の粒子の運動についての近似的な解を与えてくれる.

3.7 Stability of Equilibrium Points

この節では、前節までで述べた平衡点の安定性について考察する。系がポテンシャルから決まる力によって支配されている場合、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は保存する。そのような系では、安定な運動では平衡点でポテンシャルが最小となる。これらの点に置かれた物体は、小さな変位があっても、この点の近傍に留まり続けるだろう。このことを平衡点で微小変位する物体を考えることで示してみる。ポテンシャルエネルギーは最小から増加しなければならないため、運動エネルギーはゼロになるまで減少する。しかし、2つのエネルギーの和は一定なので、運動エネルギーがゼロになる点で、運動は逆転し、この点から運動エネルギーは増加し、また、ポテンシャルエネルギーは減少する。運動に抗する力が働く場合には粒子は平衡点に向かう運動を行う。なお、2体運動の場合はそのような抵抗力は粒子の運動速度を増す。なぜなら、エネルギーの減少は、軌道半径の減少を意味するからである。

正三角形平衡解近傍でのゼロ速度曲線について考えてみる。 L_4, L_5 付近では、 $C_J = 2U - v^2$ が最小となることは既に述べた。以前に U を負数として表すため U^* を導入した ($U^* = -U$) ので、 L_4, L_5 では C_J が最大になることになる。しかし、実際の運動で大事な事は、粒子の運動の方向である。図 3.11 は $\mu_2 = 0.1$ での2つのゼロ速度曲線を表している。式 (3.16)¹²、(3.17)¹³ を使って曲線上での様々な点での加速度ベクトル (\ddot{x}, \ddot{y}) を求め図中の矢印で表現した。この加速度ベクトルに注目すると、常にゼロ速度曲線に垂直であり、その大きさは平衡点の近くで最大となることがわかる。

図 3.11 で表されている初期速度の方向は、 L_4 から離れる方向であり C_J が大きくなる

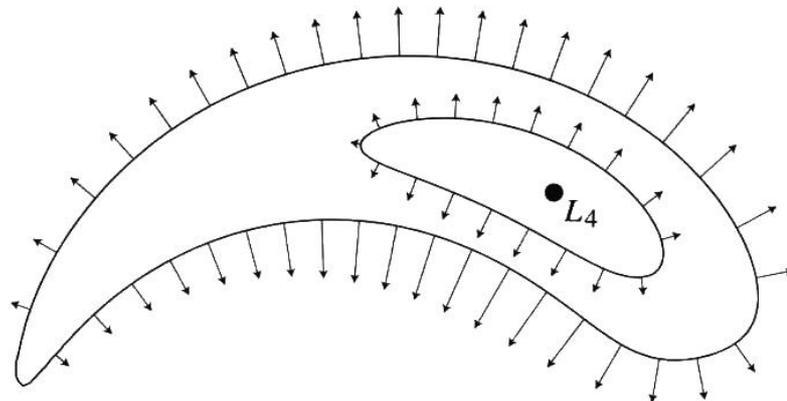


図 3.11: 2つのゼロ速度曲線 ($C_J = 2.95, C_J = 3.09, \mu_2 = 0.1$) 上での初期運動の相対的な大きさと方向.

¹²式 (3.16): $\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -[\mu_1(x + \mu_2)/r_1^3 + \mu_2(x - \mu_1)/r_2^3]$

¹³式 (3.16): $\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -[\mu_1/r_1^3 + \mu_2/r_2^3]y$

領域を向いているので, L_4 は不安定な平衡点だと考えることができる. しかし, 見た目がそうになっているだけかも知れない. よって, 平衡点安定性を考えるため, 平衡点から少し離れた場所に置いた粒子の運動を調べてみよう. この作業を運動方程式を線形化し, 線形安定性解析(linear stability analysis) を実行することで行う.

円制限問題における平衡点の位置を (x_0, y_0) で表し, 粒子を平衡点から微小変位させる. 微小変位を (X, Y) であらわす. よって粒子の座標は $(x, y) = (x_0 + X, y_0 + Y)$ で表される. これを式 (3.19)¹⁴, 式 (3.20)¹⁵ に代入して, テイラー展開する.

$$\begin{aligned}\ddot{X} - 2n\dot{Y} &\approx \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right)_0, \\ &= X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 + Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0\end{aligned}\quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}\ddot{Y} + 2n\dot{X} &\approx \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)_0, \\ &= X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0 + Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0.\end{aligned}\quad (3.100)$$

添え字の 0 は平衡点での偏微分の値を示す. また, $(\partial U/\partial x)_0 = (\partial U/\partial y)_0 = 0$ を使った $(\partial U/\partial x = \partial U/\partial y = 0$ を解いて平衡点を求めた). 今は平衡点付近の運動について考えているので, (X, Y) 高次の項は無視できる. ここでの初期の非線形微分方程式から運動方程式を線形化(linearise)したのである. 線形化した微分方程式を以下の形に書き直す.

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = XU_{xx} + YU_{xy}, \quad \ddot{Y} + 2\dot{X} = XU_{xy} + YU_{yy}.\quad (3.101)$$

ここで $n = 1$, また,

$$U_{xx} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0, \quad U_{xy} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0, \quad U_{yy} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0.\quad (3.102)$$

は全て定数である. これらの方程式を解くには多くの方法があり, 同様の方程式はこの本の中で多く登場する. よってここでこれらの方程式の解法について触れておく.

まず, 方程式を行列の形に書き換える.

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}\quad (3.103)$$

¹⁴式 (3.19): $\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$

¹⁵式 (3.20): $\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$

これより、2つの連立2階微分方程式が、4つの連立1階微分方程式に変換された。この方程式は次式のような形をしている。

$$\dot{X} = AX, \quad (3.104)$$

$$X = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

先に進める前に、式(3.104)のような、 A が $n \times n$ の行列、 X が n -次元ベクトルである場合の、一般的な行列方程式について考えてみよう。

x が以下の方程式を満たす時、

$$Ax = \lambda x, \quad (3.106)$$

λ はスカラー量の定数。このとき x を A の固有ベクトル(eigenvector)、 λ を固有値という。 A を変換行列と考えると、式(3.106)を満たすベクトル x に A を作用させると、 x と同じ方向を持ち、大きさの違うベクトルが生じたということになる。

式(3.104)を解くためにまず、 A の固有値を見つける。式(3.106)を書き換えて、

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (3.107)$$

とする。 I は $n \times n$ の単位行列である。この n 本の連立方程式は、 $A - \lambda I$ の行列式が0のとき、自明でない解をもつ。

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (3.108)$$

これは固有方程式と呼ばれる。これは λ について n 次の方程式であり、 n 個の根を持つ。 n は固有ベクトルの数と同じであり、固有ベクトルは各 λ を式(3.106)に代入し、 x を求めることでわかる。

ここで、式(3.104)の微分方程式に戻る。 X の成分 X_i の時間微分方程式は様々な要素に依存している。例えば、我々の場合では、 \dot{X} は、 X, Y, \dot{Y} の関数である。もし、適当な変換によって、依存している変数を減らすことができれば、方程式を解くのが簡単になるだろう。例えば X が、 \dot{Y}_i が Y_i だけの変数であるような、 n 個の変数 Y_i にのみ依存する場合を考える。このことを相似変換と呼ばれる方法を使って行う。まず次式の形で X を Y に変換する。

$$Y = BX, \quad (3.109)$$

定数行列 B は後で決められる。

$$X = B^{-1}Y, \quad \dot{X} = B^{-1}\dot{Y}, \quad (3.110)$$

これから、式(3.104)を以下のように書き直す。

$$B^{-1}\dot{Y} = AB^{-1}Y. \quad (3.111)$$

また、両辺左から B をかけると、

$$\dot{Y} = BB^{-1}\dot{Y} = BAB^{-1}Y. \quad (3.112)$$

式 (3.112) を、 Y のみで線形結合される微分方程式である。このことは B が対角行列 Λ を使って以下のように表されるときに成り立つ。

$$BAB^{-1} = \Lambda. \quad (3.113)$$

Λ は対角行列である。もし行列 B^{-1} 列ベクトルが A の固有ベクトルからできているなら、 Λ は A の固有値を成分にもつ対角行列である。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

結局変換後の系の方程式は、

$$\dot{Y} = \Lambda Y. \quad (3.115)$$

若しくは成分で表現して、

$$\dot{Y}_i = \lambda_i Y_i. \quad (3.116)$$

式 (3.116) の解は

$$Y_i = c_i e^{\lambda_i t}. \quad (3.117)$$

c_i は n 個の積分定数である。 Y_i についての方程式の解は求めることができたが、これを元の X_i についての項に変換しなくてはならない。式 (3.110) より

$$X = B^{-1}Y = B^{-1} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

n 個の積分定数 c_i は、式 (3.118) の n 本の連立線形方程式の初期値を与えることで決めることができる。

我々の問題に対して、この解法を適用してみる。我々の場合は $n = 4$ であり、固有方程式は以下である。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & -\lambda & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.119)$$

この式は具体的に以下のような形となる.

$$\lambda^4 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\lambda^2 + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0. \quad (3.120)$$

これは, λ に関しては 4 次, λ^2 に関しては 2 次の方程式である. よって, 根は,

$$\lambda_{1,2} = \pm \left[\frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) - \frac{1}{2} \left[(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (3.121)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \left[\frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) + \frac{1}{2} \left[(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (3.122)$$

式 (3.118) の一般解は, 4 つの A の固有ベクトルを含んでいるが, 実際は必要ではない. 式 (3.118) から X, \dot{X} の解が以下のように書けることは明らかである.

$$X = \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j e^{\lambda_j t}, \quad \dot{X} = \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}. \quad (3.123)$$

$\bar{\alpha}_j$ は定数である. X と同様に Y, \dot{Y} も導くことができ, 定数 $\bar{\beta}_j$ を使って,

$$Y = \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j e^{\lambda_j t}, \quad \dot{Y} = \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}, \quad (3.124)$$

と表すことにする. 解には 4 つの定数しか存在しないので, $\bar{\beta}_j$ は $\bar{\alpha}_j$ の関数である. $\bar{\beta}_j$ と $\bar{\alpha}_j$ の関係は式 (3.101) から求まる. 式 (3.101) に X, Y, \dot{Y} を代入すると,

$$\sum_{j=1}^4 (\bar{\alpha}_j \lambda_j^2 - 2\bar{\beta}_j \lambda_j - U_{xx} \bar{\alpha}_j - U_{xy} \bar{\beta}_j) e^{\lambda_j t} = 0. \quad (3.125)$$

$\bar{\beta}_j$ について解くと,

$$\bar{\beta}_j = \frac{\lambda_j^2 - U_{xx}}{2\lambda_j + U_{xy}} \bar{\alpha}_j, \quad (3.126)$$

である. $t = 0$ のとき, 境界条件として $X = X_0, Y = Y_0, \dot{X} = \dot{X}_0, \dot{Y} = \dot{Y}_0$ とすると, 4 つの $\bar{\alpha}_j$ は 4 つの線形連立方程式の解から得られる.

$$\sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j = X_0, \quad \sum_{j=1}^4 \lambda_j \bar{\alpha}_j = \dot{X}_0, \quad \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j = Y_0, \quad \sum_{j=1}^4 \lambda_j \bar{\beta}_j = \dot{Y}_0, \quad (3.127)$$

完全な形の解は式 (3.123), (3.123) で, $\bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j$ を使った形で得られるが, 平衡点の安定性は固有値のみを調べることで判断できる. 固有値の性質を調べるため, 以下の量を定義する.

$$\bar{A} = \frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0} \quad (3.128)$$

$$\bar{B} = 3 \left[\frac{\mu_1}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^5)_0} \right] y_0^2 \quad (3.129)$$

$$\bar{C} = 3 \left[\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)}{(r_2^5)_0} \right] y_0, \quad (3.130)$$

$$\bar{D} = 3 \left[\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \right]. \quad (3.131)$$

これら定数を使って

$$U_{xx} = 1 - \bar{A} + \bar{D}, \quad (3.132)$$

$$U_{yy} = 1 - \bar{A} + \bar{B}, \quad (3.133)$$

$$U_{xy} = \bar{C}. \quad (3.134)$$

と書ける. もし, 固有値 λ_j や, $\bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j$ が複素数であったとしても, これらの量は実数であり, X, Y, \dot{X}, \dot{Y} も実数でなければならない.

固有値の一般的な形は式 (3.121), (3.122) から,

$$\lambda_{1,2} = \pm(j_1 + ik_1), \quad \lambda_{3,4} = \pm(j_2 + ik_2). \quad (3.135)$$

である. j_1, k_1, j_2, k_2 は実数であり, $i = \sqrt{-1}$ である. 平衡点からの位置, 速度ベクトルの各成分の解が $e^{\lambda_j t}$ の形で得られたことは, 2つの項 $e^{+(j+ik)t}$ が $e^{-(j+ik)t}$ の項で一致するというを示唆している. もし $j = 0$ であるなら, 解は振動解となる. なぜなら, e^{+ikt}, e^{-ikt} はサイン関数と, コサイン関数を生じるからである. しかし j が正のときは解は指数関数的に成長し, 振動解は安定ではなくなる. 故に平衡点が安定であるためには全ての固有値が純虚数である必要がある. 以下では実際の問題ではこの事がどのように働くかを見ていく.

3.7.1 The Collinear Points

Lagrangian Point の直線平衡解 L_1, L_2, L_3 について考える. これらの位置では, $y_0 = 0$, $(r_1^2)_0 = (x_0 + \mu_2)^2$, $(r_2^2)_0 = (x_0 - \mu_1)^2$ なので,

$$U_{xx} = 1 + 2\bar{A}, \quad U_{yy} = 1 - \bar{A}, \quad U_{xy} = 0. \quad (3.136)$$

固有方程式は

$$\lambda^4 + (2 - \bar{A})\lambda^2 + (1 + \bar{A} - 2\bar{A}^2) = 0, \quad (3.137)$$

となる.

例として, $\mu_2 = 0.01$ のときの L_1 の安定性を, 3.6 節での値を使って考えてみる. 3.6 節から, $x_0 = 0.848$, $y_0 = 0$. また $X_0 = Y_0 = 10^{-5}$, $\dot{X}_0 = \dot{Y}_0 = 0$, とすると, 得られる固有値は ± 2.90 , $\pm 2.31i$ となる. この値から平衡点 L_1 は不安定点だということが分かる. $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$ について解くと, $X(t)$, $Y(t)$ の解が得られる.

$$\begin{aligned} X(t) &= 6.99 \times 10^{-6} e^{-2.90t} + 4.96 \times 10^{-6} e^{+2.90t} \\ &\quad + 1.96 \times 10^{-6} \cos 2.32t + 2.54 \times 10^{-6} \sin 2.32t, \\ Y(t) &= 3.25 \times 10^{-6} e^{-2.90t} - 2.31 \times 10^{-6} e^{+2.90t} \\ &\quad + 9.06 \times 10^{-6} \cos 2.32t + 6.96 \times 10^{-6} \sin 2.32t, \end{aligned} \quad (3.138)$$

各式の 2 項目から解 X, Y が指数関数的に成長することがわかる. 成長の時間スケールは質量 μ_2 のケプラー周期の $1/2.90$ である.

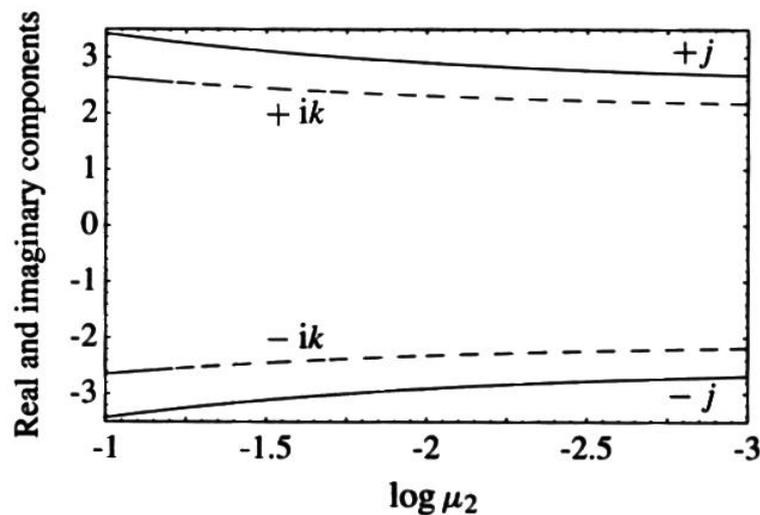


図 3.12: 固有方程式の根の実部 (実線) 虚部 (破線) 成分の値. 横軸は $\log \mu_2$ である

L_1 における解の実部と虚部がゼロでないときの値を図 3.12 に示した. μ_2 は 0.1 から 0.001 まで変化させている. 上述したように, 根は $\pm j, \pm ik$ の形を持つ. ただし j, k は実数である. L_2, L_3 の平衡点でも値は違うが同様にプロットすることができる.

多項式の性質として, 多項式の根は, 式中の定数部分と同じにならなくてはならない. よって固有方程式は以下の式を満たす.

$$(\lambda_1 \lambda_2)(\lambda_3 \lambda_4) = 1 + \bar{A} - 2\bar{A}^2 \quad (3.139)$$

ここで式 (3.121), (3.122) より, $\lambda_1 = -\lambda_2, \lambda_3 = -\lambda_4$ である. これらの値が全て虚数から成る (平衡点が安定) ためには, $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 < 0, \lambda_3^2 = \lambda_4^2 < 0$ である必要がある. これは, $1 + \bar{A} - 2\bar{A}^2 = (1 - \bar{A})(1 + 2\bar{A}) > 0$ と書ける. よって直線平衡解は $-1/2 < \bar{A} < 1$ のときに安定だということがわかる. しかし, 式 (3.128) に直線平衡解での r_1, r_2 を代入しても, $\mu_2 < 1/2$ のとき, $\bar{A} > 1$ となる. このことから直線平衡解は全ての μ_2 で不安定な解となるのである. 実際, 解は常に式 (3.138) のような形を持ち, 質量の減少とともに固有値も減少している. 物理的には直線平衡解に不安定性が存在することは, x 軸上の各点で重力と遠心力が変化することを考えることで理解できる. 2 質量から離れていくことで, 重力の影響は減り, 遠心力は大きくなる. 故に, 確かに 2 質量の外側に 2 つの平衡点が存在する. 同様の理由で, 2 質量の間にも平衡点が 1 つ存在することがわかる. x 軸に沿って存在する粒子に働く力は平衡点から離れる方向を向いているので, 直線平衡解は全て不安定となる.

しかし, 初期条件をうまくとると, 直線平衡解近傍でも安定な軌道を持つことができる (Szebehely 1967). 実際, 地球-太陽の L_1 点付近において SOHO (Domingo et al., 1995) という衛星が, 安定軌道に乗りながら太陽観測を行っている.

3.7.2 The Triangular Points

ここでは Lagrangian Point の正三角形解 L_4, L_5 について考える. この場合, $r_1 = r_2 = 1, x = 1/2 - \mu_2, y = \pm\sqrt{3}/2$ であり,

$$U_{xx} = 3/4, \quad U_{yy} = 9/4, \quad U_{xy} = \pm 3\sqrt{3}(1 - 2\mu_2)/4. \quad (3.140)$$

となる. 固有方程式は

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu_2(1 - \mu_2) = 0. \quad (3.141)$$

となる. 例を使って考えてみる. L_4 平衡点にて, $\mu_2 = 0.01$ とすると, $x_0 = 0.49, y_0 = \sqrt{3}/2$ という平衡点の位置を得る. ここから得られる固有値は, $\pm 0.963i, \pm 0.268i$ であり, この

平衡点が安定だということがわかる. 摂動運動の解は

$$\begin{aligned} X(t) &= 3.45 \times 10^{-5} \cos 0.268t - 2.45 \times 10^{-5} \cos 0.963t, \\ &\quad + 3.07 \times 10^{-4} \sin 0.268t - 8.55 \times 10^{-5} \sin 0.963t, \\ Y(t) &= 5.20 \times 10^{-5} \cos 0.268t - 4.20 \times 10^{-5} \cos 0.963t, \\ &\quad - 1.76 \times 10^{-4} \sin 0.268t + 4.90 \times 10^{-5} \sin 0.963t, \end{aligned} \quad (3.142)$$

である. この解はケプラー周期のそれぞれ, $1/0.268$, $1/0.963$ の2つの周期を持って運動している.

図 3.13 は質量によって固有値がどう変わるのかを示している. 図から, $\log \mu_2 \approx -1.4$ を閾値として, $\log \mu_2$ がこの値より大きいときは固有値が実部を持つことがわかる. この場合, 固有値は $\pm j \pm ik$ の形となり, 常に正の実部を持つ. しかし, 与えられる μ_2 は十分小さいので, 固有値は, 常に純虚数となり, 摂動運動は安定となる.

図 3.13 の解の振る舞いは, 固有方程式の解析解を考えることで理解できる. U_{xx} , U_{yy} , U_{xy} を式 (3.121), (3.122) に代入すると, 以下の式を得る.

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-1 - \sqrt{1 - 27(1 - \mu_2)\mu_2}}}{\sqrt{2}} \quad (3.143)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 - 27(1 - \mu_2)\mu_2}}}{\sqrt{2}} \quad (3.144)$$

この式から, 以下が満たされれば全ての固有値は純虚数となる.

$$\begin{aligned} 1 - 27(1 - \mu_2)\mu_2 &\geq 0 \\ \mu_2 &\leq \frac{27 - \sqrt{621}}{54} \approx 0.0385 \end{aligned} \quad (3.145)$$

固有値は実数部を持たないとき, k_1, k_2 を実数として, $\lambda_{1,2} = \pm ik_1$, $\lambda_{3,4} = \pm ik_2$ と表される. ここで, a_j, b_j を実数として, $\alpha_j = \bar{a}_j + ib_j$ と書くと, 解 $X(t)$ は以下の形で書ける.

$$\begin{aligned} X(t) &= (\bar{a}_1 + i\bar{b}_1)e^{+ik_1t} + (\bar{a}_2 + i\bar{b}_2)e^{-ik_1t} \\ &\quad + (\bar{a}_3 + i\bar{b}_3)e^{+ik_2t} + (\bar{a}_4 + i\bar{b}_4)e^{-ik_2t}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

$Y(t)$ についても同様である. 式 (3.127) と X, Y, \dot{X}, \dot{Y} が実数であることから, $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = a_1$, $\bar{a}_3 = \bar{a}_4 = a_2$, $\bar{b}_1 = -\bar{b}_2 = b_1$, $\bar{b}_3 = -\bar{b}_4 = b_2$ となることを示すことができ, e の係数を, 複素共役の関係をもつ係数で書くことができる.

$$\begin{aligned} X(t) &= (a_1 + ib_1)e^{+ik_1t} + (a_1 - ib_1)e^{-ik_1t} \\ &\quad + (a_2 + ib_2)e^{+ik_2t} + (a_2 - ib_2)e^{-ik_2t}, \end{aligned} \quad (3.147)$$

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と係数が複素共役の関係を持つことから、この式は以下のように書きなおすことができる.

$$X(t) = 2a_1 \cos k_1 t + 2a_2 \cos k_2 t - 2b_1 \sin k_1 t - 2b_2 \sin k_2 t. \quad (3.148)$$

故に、固有値が実数を含まないならば、平衡点からずらしたときの粒子は振動する. つまり、粒子は平衡点付近にとどまり、安定となる.

式 (3.145) の状態が満たされない場合、固有値は実部を持ち、 $\pm(j \pm ik)$ の形となる (図 3.13 の左側を参照). この場合、

$$X(t) = (\bar{a}_1 + i\bar{b}_1)e^{(j+ik)t} + (\bar{a}_1 - i\bar{b}_1)e^{(j-ik)t} + (\bar{a}_2 + i\bar{b}_2)e^{(-j+ik)t} + (\bar{a}_2 + i\bar{b}_2)e^{(-j-ik)t}, \quad (3.149)$$

$$X(t) = 2(a_1 e^{jt} + a_2 e^{-jt}) \cos kt - 2(b_1 e^{jt} + b_2 e^{-jt}) \sin kt. \quad (3.150)$$

と書くことができる. この解は常に指数関数的に成長する. Y, \dot{X}, \dot{Y} についても同様である. このことは粒子が螺旋状の軌道を持って平衡点から外れていくことを示している. つまりこの点は不安定となる.

ここでまた安定な場合 ($\mu_2 < 0.0385$) について考える. 式 (3.143), (3.144) から、

$$\lambda_{1,2} \approx \pm \sqrt{-1 + \frac{27}{4}\mu_2}, \quad \lambda_{3,4} \approx \pm \sqrt{-\frac{27}{4}\mu_2}. \quad (3.151)$$

これらの式は、 μ_2 が小さいときは純虚数であり、正三角形平衡点に対して 2 つの振動数を持って振動することがわかる. 平衡点 L_4, L_5 付近での摂動運動が 2 つの振動数を持つ

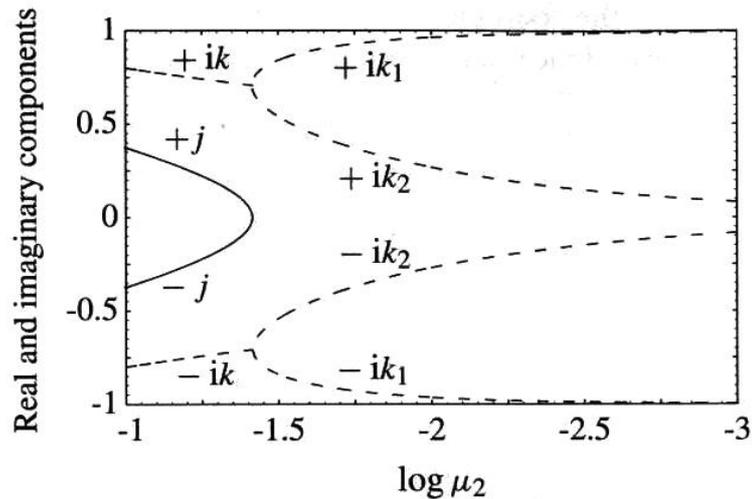


図 3.13: 固有方程式の根の実部 (実線) 虚部 (破線) 成分の値. 横軸は $\log \mu_2$ である. 固有値の閾値は $\log \mu_2 \approx -1.4$ である.

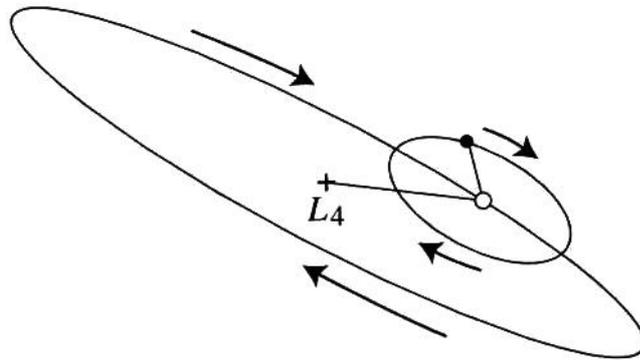


図 3.14: 式 (3.142) の解の図. 周転円軌道 (小さな楕円) と epicenter の軌道 (大きな楕円) を示している. epicenter は小さな白丸, 十字は L_4 平衡点である. 平衡点周りでの粒子の軌道は周転円運動と epicenter の運動の組み合わせで示される.

ことは, 更なる問題を生じる. 式 (3.145) の一般性が弱くなるのである. これらの振動数の間に共鳴(resonances) の関係があると, ある有限の数の質量比において, 式 (3.145) が満たされていても不安定となることが起こりうる (Deprit & Deprit-Bartholome 1967).

3.8 Motion near L_4 and L_5

ここまでで考えてきた系は, μ_2 の平均運動を単位とし, 周期を 2π とするものであった. 3.7 節で求めた摂動運動の周期は, $2\pi/\lambda_{1,2}$, $2\pi/\lambda_{3,4}$ である. このことから平衡点付近での粒子の運動は 2 つの異なる運動からなると考えることができる.

- 短い周期 $2\pi/\lambda_{1,2} \approx 2\pi$ の運動 (この周期は μ_2 の周期に近い.),
- 長い周期の $2\pi/\lambda_{3,4}$ の, 秤動(libration) として知られる運動,

である.

これら 2 つの運動の振幅は $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$ によって決まり, 初期条件によって決まる. 粒子の運動は, 平衡点の周りでの長周期の epicenter の運動と, 短周期の, epicenter の周りでの運動 (周転円運動) に分けることができる (図 3.14). 結果として式 (3.142) から得られる粒子軌道の数値解は図 3.15 のようになる

この運動は平衡点に対する摂動運動である 2 つの運動の結果である. 座標系を平衡点を中心にして 30° 時計回りに回転させることでこの運動を簡単化することができる. 変換後の X 軸はおよそ単位円に接する. 新しい座標 (X', Y') は以下の式で書ける.

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}. \quad (3.152)$$

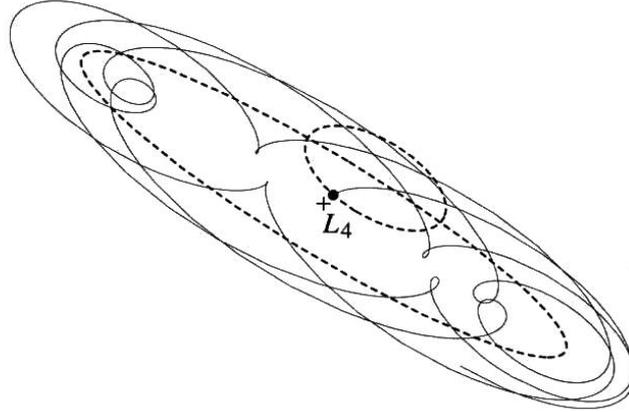


図 3.15: 粒子が L_4 平衡点に関して秤動している際の軌道を回転座標系から見た図. この軌道は安定性問題に関する式 (3.142) において, $t = 0$ から 25π 単位時間 (μ_2 の周期の 12.5 倍) までの軌道を描いている. 破線は図 3.8 の周転円運動と epicenter の軌道である.

$X(t), Y(t)$ は式 (3.142) から決まり,

$$\begin{aligned} X(t) &\approx 3.54 \times 10^{-4} \sin 0.268t - 9.85 \times 10^{-5} \sin 0.963t, \\ Y(t) &\approx 6.23 \times 10^{-5} \cos 0.268t - 4.86 \times 10^{-5} \cos 0.963t, \end{aligned} \quad (3.153)$$

角速度以外の式中の定数は境界条件に依存するが, 回転させることで軌道の解のいくつかの新たな性質が浮かび上がってくる. 2つの運動に分けることにより, 各運動が式 (2.40)¹⁶ の形で表され, 各運動が楕円を描くことがわかる. epicenter の運動の場合, その軌道は引き伸ばされた楕円となる. 3.10 節ではこの楕円の大きさが associated zero-velocity curve の大きさによって決まり, また, 半短軸, 半長軸の割合は $b/a = (3\mu_2)^{1/2}$ で与えられることを示す.

epicenter の周りでの周転円 (epicyclic) 運動では, 粒子の軌道は楕円であり, その楕円の半長軸と半短軸の長さの比は 2:1 で近似することができる. 今, 回転系での軌道を考えているが, この運動は 2.6 節の 2 体問題における the guiding center approximation と同じである. よってここでの周転円運動を, 半長軸 $2e$, 半短軸 e の楕円軌道を持つケプラー運動として考えることができる. この場合 $e \approx 5 \times 10^{-5}$ である. 実際の運動はこれほど簡単ではなく, 粒子の離心率は接触軌道要素としての離心率として考える必要があり, μ_2 から”強制された”離心率 (epicenter の軌道が引き伸ばされる効果も含む) と 2:1 の周転円運動によって与えられる”自由な”離心率との重ね合わせとして考える必要がある. ちなみに適切な初期条件を与えることによって, 周転円運動の軌道を消去することができ, その場合, 粒子の軌道は epicenter の軌道となる.

¹⁶式 (2.40) : $(\bar{x}/a)^2 + (\bar{y}/b)^2 = 1$

3.9 Tadpole and Horseshoe Orbits

L_4, L_5 に対する摂動運動は平衡点の近傍で、また振幅が小さい場合のみ意味を持つ。これはつまり、平衡点からのずれが大きい場合の解を推測することはできないということの意味する。しかし、粒子の運動方程式に対して数値積分を行うことは可能である。(3.2節の式(3.16)¹⁷, (3.17)¹⁸)

図 3.16 は L_4 近傍での $\mu_2 = 0.001$ における 2 つの軌道を、運動方程式を数値積分して示したものである。この値は太陽-木星の質量比と同じである。図 3.16a の軌道は、図 3.16b よりも初期位置がわずかに L_4 に近い。どちらの結果でも粒子軌道は L_4 前方にもひしゃげながら広がっている。図 3.16a では軌道の拡がりは 86° に達し、図 3.16b では 115° に達する。2 つの質量と L_4 は正三角形を成しており、2 つの質量を結ぶ線分を単位長さとしていることから、図 3.16 から、粒子の軌道が質量 μ_1 を中心とする単位円付近を運動していることがわかる。この軌道はその形とゼロ速度曲線の形から Tadpole 軌道と呼ばれる。自由離心率がゼロの時に軌道はより単位円に近づく。Tadpole orbit は L_5 の周りでも生じる。

ここで、初期条件として L_4, L_5 からの距離をどの程度増やすとどういう軌道ができるのかという疑問が生じる。初期の距離を増やしたとしても距離がそう遠くない場合、軌道は L_4, L_5 点を取り囲む様な形となる。このような軌道を馬蹄形軌道(Horseshoe orbit)という。図 3.17 で 2 つの馬蹄形軌道を示している。初期条件は Taylor (1981) の論文からとった。図 3.17b では、周転円運動が生じないような初期条件をとってある。

図 3.16, 3.17 の epicenter の軌道と図 3.9 のゼロ速度曲線を比較すると良く似ている。

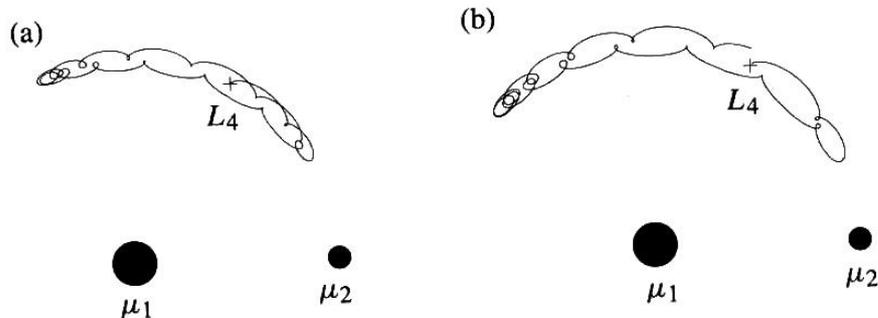


図 3.16: $\mu_2 = 0.001$ における、 L_4 平衡点の周りの Tadpole 軌道の例 (L_4 点の座標は $x_0 = 1/2 - \mu_2, y_0 = \sqrt{3}/2$). 大小の黒丸はそれぞれ質量 μ_1, μ_2 の物体である。(a) 初期状態を $x = x_0 + 0.0065, y = y_0 + 0.0065, \dot{x} = \dot{y} = 0$ とし、 μ_2 の周期の 15 倍の時間内での軌道。(b) 初期状態を $x = x_0 + 0.008, y = y_0 + 0.008, \dot{x} = \dot{y} = 0$ とし、 μ_2 の周期の 15.5 倍の時間内での軌道。

¹⁷式(3.16): $\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -[\mu_1(x + \mu_2)/r_1^3 + \mu_2(x - \mu_1)/r_2^3]$

¹⁸式(3.17): $\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -[\mu_1/r_1^3 + \mu_2/r_2^3]y$

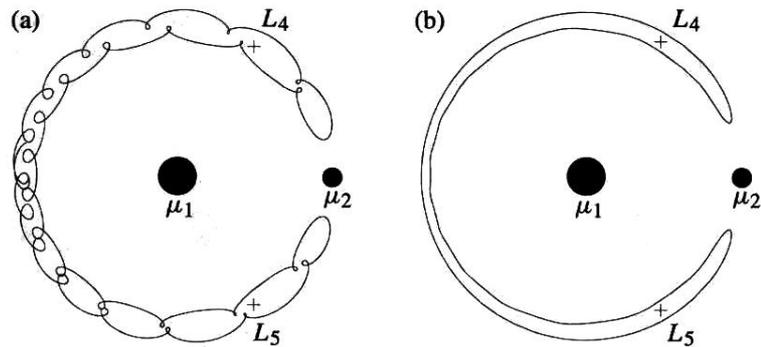


図 3.17: $\mu_2 = 0.000953875$ における 2 つの馬蹄形軌道の例 (Taylor 1981). (a) 初期状態 : $x = -0.97668, y = -0.06118, y = \dot{x} = 0$ (b) 初期状態 : $x = -1.02745, y = 0.04032, y = \dot{x} = 0$.

しかし, 3.10 節で示すように, μ_2 が小さいとき 2 つの間には密接な関係があるが, ゼロ速度曲線が軌道を定義するわけではない. 図 3.16, 3.17 で示された軌道がゼロの初期速度を持つことを考えれば, ゼロ速度と関連することがわかる. しかしゼロ速度曲線は, 粒子が L_4, L_5 に近づきすぎないということを保証しているだけであり, 軌道の長期安定性についてなんら示唆を与えるものではない. しかし, 軌道の Jacobi 定数が L_4, L_5 の値よりも小さいとき, ゼロ速度曲線を描くことはできず, 排他領域も存在しないことを覚えておかなばならない.

小さな質量比における運動方程式を数値計算することで馬蹄形軌道と Tadpole 軌道の性質を図示することができる. 図 3.18 では, $\mu_2 = 10^{-3}$ の場合の, 3 つの軌道 (馬蹄形軌道 1 つ, Tadpole 軌道 2 つ) を示している. ここで θ は, 軌道の, μ_1 から μ_2 に引いた直線からの角度を示す. 3 つの軌道は初期の離心率を $e \approx 0$ としている. 半長軸はかなり変化し, L_4, L_5 の平衡点で単位円から最も大きくずれ, これらの点で馬蹄形軌道と Tadpole 軌道の幅が最大となる. また軌道はかなりの非対称性を持っており, これは L_3 点が馬蹄形軌道の外側と内側の分岐の中心, $\theta = 180^\circ$, に位置していないことからわかる. ここでは r ではなく, a の変化についてプロットしているが, $e \approx 0$ として考えているのでほとんど違いはない. 故に図 3.16, 3.17 で見られたようなループは見られない.

$\mu_2 = 10^{-3}$ における馬蹄形軌道での a, e の時間変化を図 3.19 に示す. μ_2 に接近することで比較的突然に a が変化する. そのときの軌道半長軸 a は $a > 1$ から $a < 1$ へ, またはその逆に変化する (図 3.19a). ここで $a = 1 + \Delta a$ と書き, $\theta = 180^\circ$ 毎の Δa を計算すると, 興味深い現象が現れる. 初期値 $\Delta a = 0.020$ とする. この時, 1 回の接近後には $\Delta a = -0.0143$ となる. しかし, 2 回目の接近後の値は $\Delta a = 0.0198$ となり, その後の接近では同じ値が繰り返される. このことは, $|\Delta a|$ の非対称性が馬蹄形軌道を 1 回回ることでキャンセルされることを示している. 3.15 節ではこの性質が, 抵抗力による軌道減衰

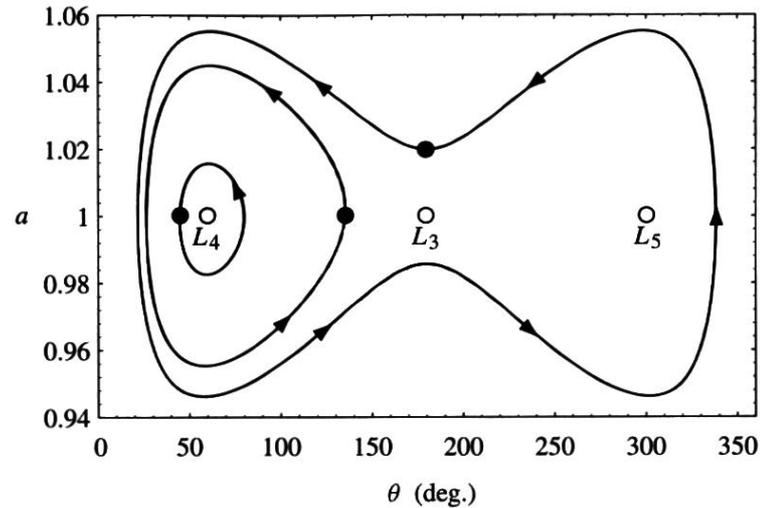


図 3.18: $\mu_2 = 10^{-3}$ における3つの軌道に関する半長軸 a を θ の関数として表したもの. 初期位置は黒丸, 平衡点は白丸. 全ての軌道は μ_2 周期の 100 周期分の軌道である. 矢印は運動の方向である.

に抗するような馬蹄形軌道について扱う上で有益なことを示す (Dermotto et al., 1980, Dermott & Marray 1981a). 図 3.19b から質量 μ_2 への接近は e に関しても, 値にして1桁の急激な増減を与えることがわかる. 最接近と次の最接近間における離心率の小さな振動は, phase effects が重要であることを示唆している (L_4, L_5 では, Tisserand の判定式

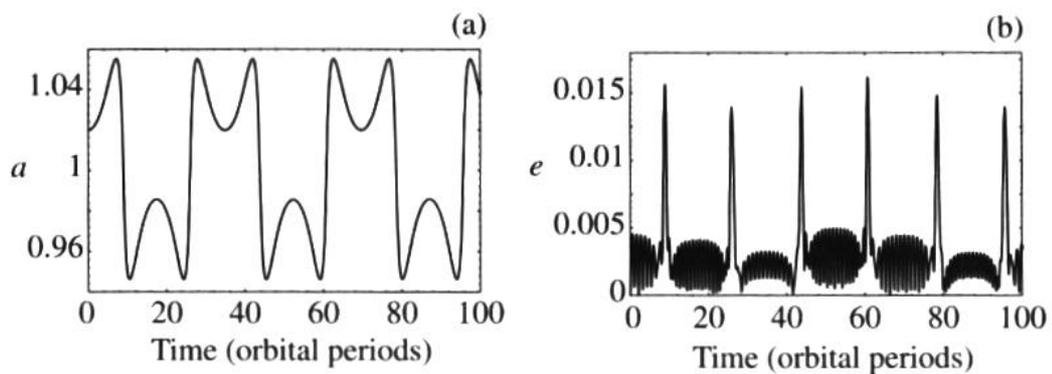


図 3.19: 図 3.18 の馬蹄形軌道における (a) 半長軸 a の時間変化. (b) 離心率 e の時間変化. なお, 質量比は $\mu_2 = 10^{-3}$ である.

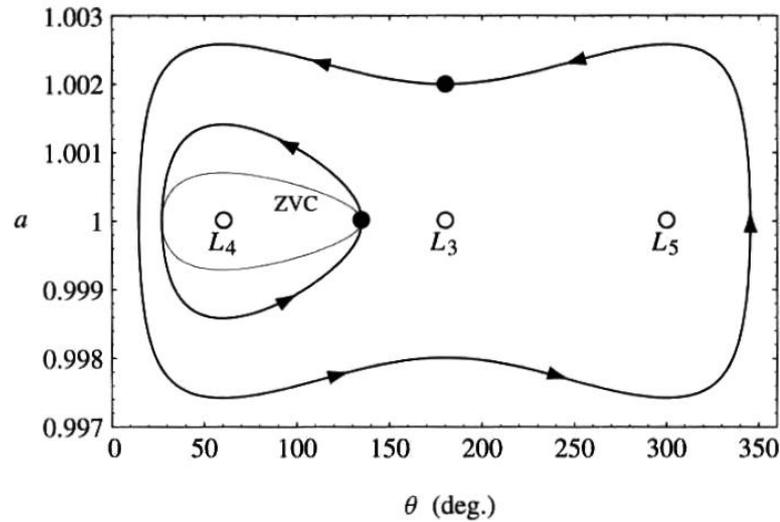


図 3.20: $\mu_2 = 10^{-3}$ における3つの軌道に関する半長軸 a を θ の関数として表したものの。初期位置は黒丸, 平衡点は白丸. 細線は Tadpole 軌道に関するゼロ速度曲線. 全ての軌道は μ_2 周期の 100 周期分の軌道である. 矢印は運動の方向である.

に従って, 最大の振幅を持つ). このことは, 最接近における離心率の impulse を説明する助けとなる.

質量比を小さくした場合の効果が図 3.20, 3.21 で示されている. ここでは $\mu_2 = 10^{-6}$ としてある. μ_2 を小さくしたので, 初期の半長軸を $a = 1.002$ とした (Δa の値は 1 桁小

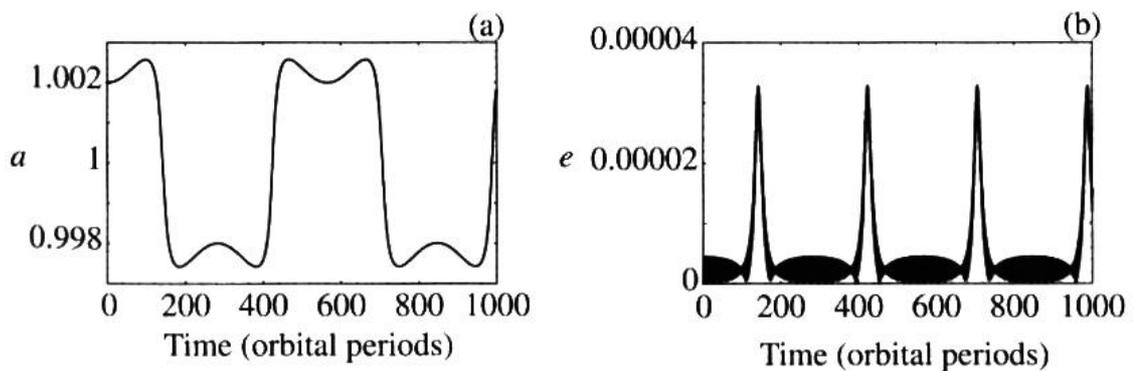


図 3.21: 図 3.20 の馬蹄形軌道における (a) 半長軸 a の時間変化. (b) 離心率 e の時間変化. なお, 質量比は $\mu_2 = 10^{-6}$ である.

さくなっている). 図 3.20 では θ による a の変化をプロットしてある. a は, 図 3.18 と同じように, L_4, L_5 (それぞれ $\theta = 60^\circ, 300^\circ$) で最大の幅を持つ. しかし, この 2 つにはわずかな違いがある. まず, L_3 での対称性の程度は, μ_2 が小さい場合のほうが良く, $\theta = 180^\circ$ では L_3 はほとんど内側軌道と外側軌道の中間に位置している. 次に, 2 つの Tadpole 軌道は, 図 3.18 と同様に, 45° と 135° の位置から始まっているが, 半長軸 a の違いは図 3.18 のものより小さい. このことから, Tadpole 軌道領域の半径方向への広がり, μ_2 が小さくなるにつれ, 小さくなることを示唆している. Tadpole 軌道では比較のため, ゼロ速度曲線も図示してある. なお, ゼロ速度曲線の半径の幅は常に Tadpole 軌道の半分となる.

小さな μ_2 に対する, 対称性の程度が図 3.21 で示されている. この計算では初期条件は $\Delta a = 0.00200$ であり, 1 回目の最接近後には $\Delta a = -0.00199$, 2 回目の最接近後には $\Delta a = 0.00200$ となっている. 馬蹄形軌道の長期安定性とその周期軌道の対称性から推測できるとすれば, 小さな μ_2 の馬蹄形軌道は高い安定性を持つといえる. e の変化に関する考察により, 最接近における振幅変化のオーダー単位での変化がまだ起こることがわかる. しかし, その対称性は大きい μ_2 の場合よりもさらに良くなる.

もし初期条件を単位円の外側もしくは内側のおよそ円軌道に一致するようにとるとすれば, その粒子軌道の性質は, 単位円からの距離によって決まることは明らかである. 解析的にも数値的にもどのように L_4, L_5 に近づくかを示してきた. 初期の間隔が増加するほど, その後の軌道は L_3 の方向に引き伸ばされる (Tadpole 軌道). 単位円から十分遠い点から出発した粒子は, L_4, L_3, L_5 について秤動する軌道をとる (馬蹄形軌道). しかし, 粒子が単位円から十分遠い軌道上を運動している場合, epicenter の運動する方向は変化せず, 粒子は単位円の内側若しくは外側を循環 (circulate) する軌道を取る. Jacobi 定数によっては μ_2 に衝突する粒子も存在可能であるかもしれない.

3.10 Orbits and Zero-Velocity Curves

ゼロ速度曲線とはある位置座標と速度を持つ物体の、運動可能である領域を定義するものであった。図 3.15 の軌道のゼロ速度曲線は引き伸ばされた形をしており、水平から約 30° 傾いている。ここで、座標原点を平衡点に移動し、座標系を 30 度回転させ、さらに新しい原点の周りで展開することで三角形解近傍でのゼロ速度曲線の振る舞いについて考察することができる。ここでは L_4 平衡点の座標 $x = 1/2 - \mu_2$, $y = \sqrt{3}/2$ を例にとって考察する。式 (3.8)¹⁹, (3.9)²⁰, において $x \rightarrow (1/2 - \mu_2) + x$, $y \rightarrow \sqrt{3}/2 + y$ と変換する。さらに、座標系を 30 度半時計周りに回転させることで、 $x \rightarrow \sqrt{3}x'/2 + y'/2$, $y \rightarrow -x'/2 + \sqrt{3}y'/2$, の座標を新しい座標 (x', y') を得る。この過程より、

$$r_1^2 = 1 + 2y' + x'^2 + y'^2 \quad (3.154)$$

$$r_2^2 = 1 - \sqrt{3}x' + y' + x'^2 + y'^2 \quad (3.155)$$

となる。式 (3.22)²¹ からゼロ速度曲線を定義するための、変換された方程式 $C_J = 2U$ は、以下のように与えられる。

$$C_J = 1 - \mu_2 - \sqrt{3}\mu_2x' + (2 - \mu_2)y' + x'^2 + y'^2 + 2 \left(\frac{1 - \mu_2}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right), \quad (3.156)$$

ここで、 $\mathcal{O}(\mu_2^2)$ は微量として無視した。式 (3.156) を新しい座標原点の周りで展開すると、以下の式を得る。

$$C_J \approx 3 - \mu_2 + \frac{9}{4}\mu_2x'^2 + 3y'^2 \quad (3.157)$$

3 次以上の項は無視し、また、(i) μ_2 は微量と仮定していること、(ii) 図 3.9 のゼロ速度曲線において動径方向の曲線の幅は小さな μ_2 においては小さいことから、 μ_2y' を含む項も無視している。 μ_2x が近似を使わずに消去されている点に注意すること。ここでの近似は単位円に沿ったゼロ速度曲線のゆがみを無視することと同じである。ここで、

$$C_J = 3 + \gamma\mu_2 \quad (3.158)$$

と書けるとする。ここでの γ は小さな量で、 L_4, L_5 平衡点では -1 に等しい (式 (3.97)²², 式 (3.98)²³)。すると式 (3.157) は、

$$\frac{x'^2}{(4/9)(1 + \gamma)} + \frac{y'^2}{(\mu_2/3)(1 + \gamma)} = 1. \quad (3.159)$$

と書き直せる。これを、式 (2.40)²⁴ と比較すると、このゼロ速度曲線は、半長軸、半短軸それぞれ $a' = (2/3)\sqrt{1 + \gamma}$, $b' = \sqrt{\mu_2/3}\sqrt{1 + \gamma}$ を持ち、 L_4 平衡点を中心とする楕円と

¹⁹式 (3.8): $r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2$

²⁰式 (3.9): $r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2$

²¹式 (3.22): $U = n^2(x^2 + y^2)/2 + \mu_1/r_1 + \mu_2/r_2$

²²式 (3.97): $C_{L_4} \approx 3 - \mu_2$,

²³式 (3.98): $C_{L_5} \approx 3 - \mu_2$

²⁴式 (2.40): $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$.

なることがわかる. $b'/a' = (1/2)\sqrt{3\mu_2}$ であることから, $\mu_2 \rightarrow 0$ となるに従い, この楕円は引き伸ばされていくことがわかる. ちなみに b'/a' は 3.8 節での guiding center の運動での値の 2 倍であり, ゼロ速度曲線の形が粒子の軌道に支配されることを示唆している. ここで $\mu_2 \ll \mu_2^{1/2} \ll \mu_2^{1/3} \ll 1$ である場合のゼロ速度曲線と実際の軌道の関係について考えてみる. また, ここでは粒子の離心率はゼロに近いと仮定し, 故に, 粒子の秤動運動に対する周転円運動は事実上無視することができる.

まず, 式 (3.94)-(3.98)²⁵ を念頭におくと, tadpole 軌道のような形を生ずるゼロ速度曲線は, γ によって特徴付けることができる.

$$-1 \leq \gamma \leq +1. \quad (3.160)$$

下限値は L_4, L_5 平衡点における C_J での値, 上限値は L_3 平衡点での値である. 馬蹄形軌道の形の場合は,

$$C_J = 3 + \zeta\mu_2^{2/3} + \mathcal{O}(\mu_2) \quad (3.161)$$

where

$$0 \leq \zeta \leq 3^{4/3}. \quad (3.162)$$

この場合の下限値は L_3 平衡点での C_J と一致する. 上限値は L_1, L_2 での値である. 故に, γ もしくは ζ がゼロ速度曲線の tadpole や馬蹄形の形を決めるパラメーターであると考えられる.

U についての式 (3.64)²⁶ を使い, $n = 1$ とすると,

$$2U = 2\frac{\mu_1}{r_1} + \mu_1 r_1^2 + 2\frac{\mu_2}{r_2} + \mu_2 r_2^2 - \mu_1 \mu_2, \quad (3.163)$$

を得る. また式 (3.28) から,

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = 2U - C_J \quad (3.164)$$

ここでは $\mu_2 \ll 1$ と考えているため, r_1 と r を区別しない.

ここで, これらの軌道がほとんど円であり, 単位円に近い所に存在するとするとして考えてみると, $\delta r \ll 1$ として,

$$r = 1 + \delta r. \quad (3.165)$$

このような場合, $\dot{\theta} = 0, \dot{r} \neq 0$ となる質量 μ_2 近傍以外では $|\dot{r}| \ll |r\dot{\theta}|$ が成り立つ. 故に, ほとんどの時間において運動はケプラー運動とみなすことができ,

$$v \approx r\dot{\theta} = -\frac{3}{2}\delta r, \quad (3.166)$$

式 (3.94) : $C_{L_1} \approx 3 + 3^{4/3}\mu_2^{2/3} - 10\mu_2/3$

²⁵ 式 (3.95) : $C_{L_2} \approx 3 + 3^{4/3}\mu_2^{2/3} - 14\mu_2/3,$

式 (3.96) : $C_{L_3} \approx 3 + \mu_2,$

²⁶ 式 (3.64) : $U = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2.$

が成り立つ. 同じような近似により, 式 (3.163) の $2U$ を簡単化することができる. $\mathcal{O}(\mu_2)$ までの項を残すと,

$$2U = 3 + 3\delta r^2 + \mu_2 H, \quad (3.167)$$

where

$$H = \frac{2}{r_2} + r_2^2 - 4, \quad (3.168)$$

故に, $v^2 = 2U - C_J$ と式 (3.164) を使って以下の式を得られる.

$$\frac{9}{4}\delta r^2 = 3 + 3\delta r^2 + \mu_2 H - C_J. \quad (3.169)$$

ゼロ速度曲線上では $v^2 = 0$ なので, ゼロ速度曲線は以下の式で定義されることになる.

$$0 = 3 + 3\delta r_{zv}^2 + \mu_2 H_{zv} - C_J \quad (3.170)$$

添え字 zv は軌道ではなく, ゼロ速度曲線を基準として記述された量であることを示す. C_J は定数であるので, 式 (3.169), (3.170) から

$$\delta r^2 = (2\delta r_{zv})^2 + \frac{4}{3}\mu_2(H_{zv} - H). \quad (3.171)$$

tadpole 運動でも, 馬蹄形軌道においても, $H_{zv} - H \sim \delta r$, $\mu_2 \delta r \ll \delta r^2$ である. 故に guiding center の運動では,

$$\delta r = 2\delta r_{zv}, \quad (3.172)$$

こうして, guiding center の単位円からの動径方向の差は常にゼロ速度曲線のその2倍となることがわかる (Dermott & Murray 1981a).

馬蹄形軌道の場合は式 (3.161), (3.162) が適用され,

$$\begin{aligned} 3 + \frac{3}{4}\delta r^2 + \mu_2 H &= 3 + \zeta\mu_2^{2/3} + \mathcal{O}(\mu_2), \\ 3 + 3\delta r_{zv}^2 + \mu_2 H_{zv} &= 3 + \zeta\mu_2^{2/3} + \mathcal{O}(\mu_2), \end{aligned} \quad (3.173)$$

となる. このことから, 微小量 μ_2 に対して $\mu_2^{2/3} \gg \mu_2$ であることを使って,

$$\delta r = 2\delta r_{zv} = 2(\zeta/3)^{1/2}\mu_2^{1/3}. \quad (3.174)$$

tadpole 軌道においては式 (3.158), (3.160) が適用され,

$$3 + \frac{3}{4}\delta r^2 + \mu_2 H = 3 + \gamma\mu_2, \quad 3 + 3\delta r_{zv}^2 + \mu_2 H_{zv} = 3 + \gamma\mu_2. \quad (3.175)$$

故に

$$\delta r \approx 2\delta r_{zv} = 2[(\gamma - H)/3]^{1/2}\mu_2^{1/2}, \quad (3.176)$$

となる。ここでも, guiding center の単位円からの動径方向の差は常にゼロ速度曲線のそれの2倍となっている。

L_4, L_5 の平衡点の小さな振動については3.8節で見てきている。また, $\delta r \approx 2\delta r_{zv}$ から, guiding center の楕円軌道の半短軸は, ゼロ速度曲線を示す楕円の半短軸の2倍である。この主張からわかることは3つあり, まず, 式(3.153)²⁷で数値的に導かれた粒子の運動が, 以下の式で与えられるということを示唆している。

$$\begin{aligned} X'(t) &= a \sin \lambda_3(t - t_3) - 2e \sin \lambda_1(t - t_1) \\ Y'(t) &= (3\mu_2)^{1/2} a \cos \lambda_3(t - t_3) - e \cos \lambda_1(t - t_1) \end{aligned} \quad (3.177)$$

λ_1, λ_3 は2つの固有角速度であり, 4つの任意定数 a, e, t_1, t_3 は初期条件, $X'(0), Y'(0), \dot{X}'(0), \dot{Y}'(0)$ によって決められる。2番目に, 小さな e においては guiding center の運動は e に依存しないということを示している。3番目に, 最も重要なこととして, L_4, L_5 点付近での小さな振動を考えたときの guiding center の軌道とゼロ速度曲線の関係が一般的に正しく, 馬蹄形軌道の運動を含むあらゆる振幅の運動に適用することができることを示唆している。ここからはこの結果を使って更なる運動の解析を行う。

L_4, L_5 平衡点から十分離れた点での軌道は, L_3 まで尻尾を伸ばしたおたまじゃくしのような軌道となる。これらの軌道の最大角と最小角の角度の広がりには Jacobi 定数を使って計算することができる。式(3.173), (3.175)は以下のように書きなおすことができる。

$$\frac{3}{4}\delta r^2 + \mu_2 H(\theta) = \text{constant}, \quad (3.178)$$

θ は μ_1 周りでの粒子の質量 μ_2 からの角度であり, μ_1 を頂角とする2等辺3角形の性質から導かれる $r_2 = 2 \sin(\theta/2)$ の関係を使うと,

$$H(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1} - 2 \cos \theta - 2, \quad (3.179)$$

を得る。式(3.178)での定数は, tadpole では $\gamma\mu_2$, 馬蹄形軌道では $\zeta\mu_2^{2/3}$ である。

粒子軌道上の2点 $(r_i, \theta_i), (r_j, \theta_j)$ について考える。これらの極座標は以下の関係を満足する。

$$\delta r_i^2 - \delta r_j^2 = -\frac{4}{3}\mu_2 [H(\theta_i) - H(\theta_j)] \quad (3.180)$$

この関係は粒子の軌道が tadpole の場合でも馬蹄形の場合でも同じである。図3.22は $H(\theta)$ を θ の関数で表したものである。tadpole 軌道の場合は運動の極限では, $\delta r_i = \delta r_j = 0$ であることがわかるので, この点では $H(\theta_i) = H(\theta_j)$ となる。この方程式の2つの解 $\theta_{min}, \theta_{max}$, 質量 μ_2 からの最小角度, 最大角度, 2つの角度の差 $D = \theta_{max} - \theta_{min}$ は秤動運動の振幅を与える。図3.22の $H(\theta)$ の形から, 図3.18, 3.20での tadpole 軌道が振幅が大きくなるほど引き伸ばされていたことが説明できる。

²⁷ $X(t) \approx 3.54 \times 10^{-4} \sin 0.268t - 9.85 \times 10^{-5} \sin 0.963t,$
 $Y(t) \approx 6.23 \times 10^{-5} \cos 0.268t - 4.86 \times 10^{-5} \cos 0.963t.$

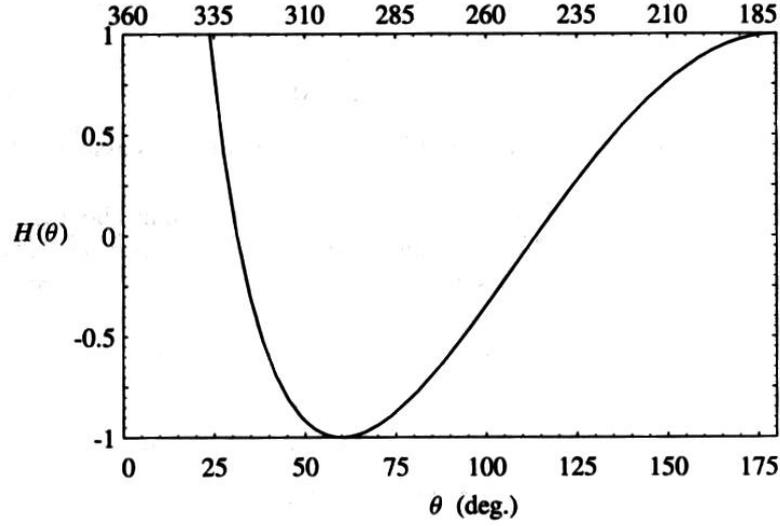


図 3.22: 式 (3.179) 中の $H(\theta)$ の値を, tadpole 軌道の場合で θ の関数としてプロットしている. L_4 での θ は下の軸で, L_5 での θ は上の軸で示している.

$\theta_i = 180^\circ$, $\delta r_i = 0$ の場合を考える. これは critical tadpole の軌道である. $H(180^\circ) = 1$ なので, 式 (3.180) は

$$\delta r_j^2 = \frac{4}{3}\mu_2[1 - H(\theta_j)], \quad (3.181)$$

となる. $H(\theta) \geq -1$ なので tadpole 軌道では以下の方程式が満たされなければならない.

$$\delta r \leq \delta r_{crit} = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/2} \mu_2^{1/2}. \quad (3.182)$$

故に, μ_2 がわかっていて, e が小さい場合には, δr (すなわち質量 μ_2 からの角度) を 1 回観測すれば粒子運動が tadpole 軌道であるかどうかを決定できることになる.

$\theta_i = 180^\circ$ で $\delta r_i = \delta r_{180} \neq 0$ の場合を考えてみる. この時, $\zeta \leq 3^{3/4}$ であれば粒子は馬蹄形軌道を持ち, $\delta r_j = 0$, $\theta_j = \theta_{min}$ のとき軌道の入れ替えが起こる. これらは以下の式で関係付けられる.

$$\delta r_{180}^2 = \frac{4}{3}\mu_2[H(\theta_{min}) - 1], \quad (3.183)$$

また, この関係は粒子と質量 μ_2 の最接近距離の評価に使われる. さらに馬蹄形運動の場合, θ_{min} を観測することで μ_2 を決定することができる. tadpole 軌道の場合は $H(\theta_{min}) = 1$ で $\delta r_{180} = 0$, θ_{min} となり, ここから, 全ての μ_2 において $\theta_{min} = 23.5^\circ$ ということがわかる.

3.11 Trojan Asteroids and Satellites

太陽系の全ての太陽-惑星間の関係において式 (3.145) が満たされている. 同様に惑星-衛星系でもこの関係をみたすものが存在している. Table 3.1 に太陽-木星系での正三角形平衡点付近で Tadpole 軌道で運動している小惑星の一覧を載せた. これらは Trojan asteroids(トロヤ小惑星群)として知られている. 1998年までに発見された Trojan asteroids は 450 個あり, L_4 点付近のものを “Greeks”, L_5 点付近のものを “Trojan” と呼ぶ.

図 3.23 は 1997 年 12 月時点での太陽-木星系でのトロヤ小惑星群の分布である. (a) は小惑星の位置を黄道面に投影しており, (b) では太陽-木星を結ぶ直線に沿って見たものであり, トロヤ小惑星群の垂直方向の広がりがわかる. トロヤ小惑星群のような小惑星は太陽-木星系だけではなく, 太陽-火星系, 太陽-地球系にも存在する.

木星, 火星のトロヤ小惑星群は太陽-惑星系における秤動運動の例である. これらはトロヤ小惑星群とも呼ばれてきたが, 普通は共軌道衛星(coorbital satellites)と呼ばれる. coorbital という言葉は, 元々 Janus と Epimetheus の配置について言及するために用いられた言葉であるが, 今はもっと大きな秤動を持つ物体に対しても持ちられている. ちなみに共軌道衛星は土星-衛星系には存在するが木星-衛星系には存在しない. この違いは tadpole 軌道と馬蹄形軌道の相対的な幅に起因すると考えられている.

3.9 節の異なる質量比の軌道図からこの現象に対する示唆が与えられている. 式 (3.174), (3.176) を比較すると馬蹄形軌道の幅は $\sim \mu_2^{1/3}$ tadpole 軌道の幅は $\sim \mu_2^{1/2}$ に比例することがわかる. ここから 2 つの軌道の幅の比 R は $\sim \mu_2^{1/6}$ 程度の大きさであり, R が減少するにつれ μ_2 もゆっくりと減少する. $\mu_2 \approx 10^{-3}$ で $R \approx 0.3$, $\mu_2 \approx 10^{-9}$ では $R \approx 0.03$ となる. このことから小さな質量比では馬蹄形軌道がより起こりやすくなるということを示唆している. 木星で共軌道衛星が見られないのは, 大きな質量比を持つ傾向があるか

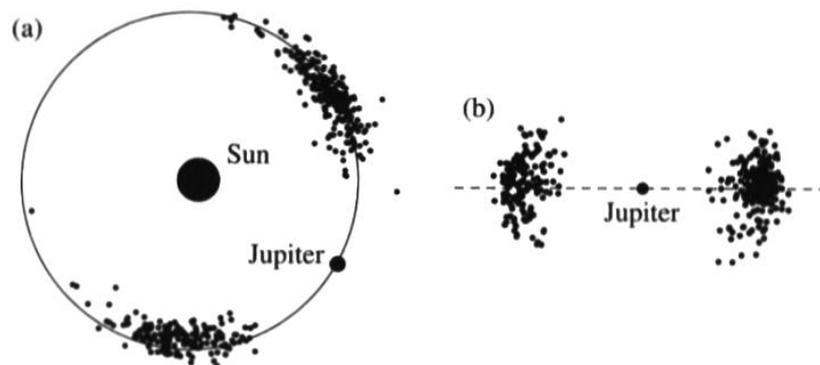


図 3.23: (a)1997 年 12 月 18 日 0:00 での木星近傍での小惑星の分布. 各点は小惑星の位置を黄道面に投影したものである. (b) 木星から太陽を見た軸に沿った, 小惑星の垂直分布. 破線は木星の軌道面である.

らかも知れず、馬蹄形軌道は摂動天体に tadpole 軌道の場合よりも近づきやすいので馬蹄形軌道の維持される時間が短いせいだと考えられる。Dermott & Murray(1981a) は粒子が2回の μ_2 への接近を経験した後での $|\Delta a|$ の進化を考えることで、馬蹄形軌道にある粒子は、 $\Gamma = T/\mu_2^{3/5}$ の時間スケールで失われていくと考えた。

3.12 Janus and Epimetheus

全てのトロヤ小惑星群や前節で述べた土星の衛星は tadpole 軌道を運動していることが知られている。しかし、図 3.9 のゼロ速度曲線の形に似た、 L_4, L_5, L_3 平衡点の周りを秤動するような軌道を運動する小惑星も存在することは可能である。そのような馬蹄形軌道を持つ小惑星の存在は、昔から理論的には示されていたが、実際に太陽系内で発見されたのは最近のことである。

1980 年 Voyager I によって土星において、Janus と Epimetheus という2つの衛星が発見された。発見時の半長軸は Janus, Epimetheus それぞれ、 $a_J = 151472\text{km}$, $a_E = 151422\text{km}$, その直径はそれぞれ約 175km, 105km であった。当初はこの2つの衛星は衝突すると考えられていたが、その後の解析の結果、これらの衛星の軌道は円制限問題の馬蹄形軌道解の1つであることがわかった。Janus-Epimetheus 系は $\mu_2 = 5 \times 10^{-9}$, $\delta r = 3 \times 10^{-4}$ から、式 (3.182) $\delta r > \delta r_{crit} \approx 17\text{km}$, 式 (3.174) $\zeta = 0.02 < 3^{4/3}$ を満たしているので、Epimetheus は馬蹄形軌道を運動している。

しかし、衛星の画像から Epimetheus の質量は、Janus に比べ無視できないことがわかり(現在は質量比が 0.25 であることが知られている。), 故に、接近時の2つの衛星の相互摂動が重要であると考えられた。実際、これから見ていくように、2つの衛星の軌道は、馬蹄形軌道を少し変形したものである。2つの衛星の運動を、土星を中心として2つの衛星の平均運動の平均で回転する系から見ると、Janus と Epimetheus は各々馬蹄形軌道を描いている。 W_J, W_E をそれぞれ Janus , Epimetheus の秤動の幅とすると、各衛星軌道を円と仮定して、角運動量保存を考えることで、以下の式が成り立つ。

$$m_J W_J = m_E W_E \quad (3.184)$$

3.5 節と同じ方法でこの系の力学的性質について考察して見る。 $m_2 < m_1$ であるような2つの質量 m_1, m_2 を考える。この2つが、円に近い軌道を、小さな軌道半径の差で中心質量 m_c の周りをケプラー運動しているものとする(図 3.24)。 C_1 は m_1 と m_c の重心、 C は系の重心とすると、 C_1, C, m_2 は一直線上に並ぶ。質量 m_2 は m_c, m_1 の重力を受けながら運動する。この力は C 方向 R_2 を向く成分とそれに垂直な T_2 の成分に分けられる。2.9 節(式 (2.149) ²⁸) より接線方向の力だけが角運動量の変化を引き起こす。式 (2.145) v^{29} と $e_2 = 0$ の仮定を使うと、

$$\dot{a}_2 = 2T_2/n_2, \quad (3.185)$$

²⁸式 (2.149) : $\frac{dh}{dt} = r\bar{T}$

²⁹式 (2.145) : $\frac{da}{dt} = 2 \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} [\bar{R}e \sin f + \bar{T}(1 + e \cos f)]$.

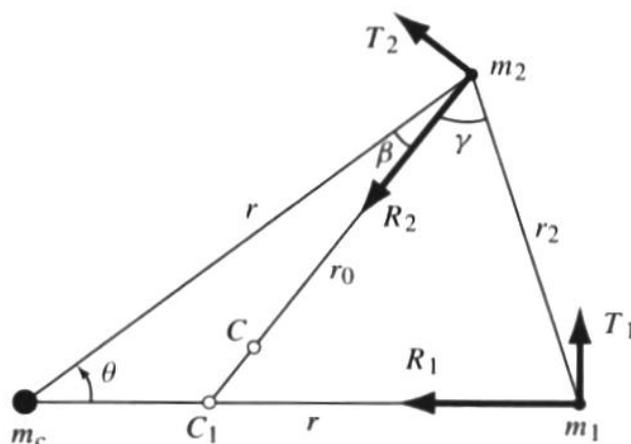


図 3.24: 馬蹄形軌道を描く m_1, m_2 についての幾何学的配置図. m_c は中心質量. C_1 は m_1 と m_c の重心. C は系の重心.

a_2, n_2 はそれぞれ m_2 の半長軸と平均運動を示している. ここでも guiding center と epicyclic 運動を考え, 自由離心率を小さいとして guiding center の運動には影響しないものとする. 数値計算の結果から, この近似が正しいことはわかっている.

m_2 に働く接線方向の力は m_c, m_1 による寄与である. 図 3.24 から,

$$T_2 = (-Gm_1/r_2^2) \sin \gamma, + (-Gm_c/r^2) \sin \beta, \quad (3.186)$$

C_1 の定義と m_2 が単位円付近にあるという仮定から,

$$\sin \gamma = \frac{m_c}{m_c + m_1} \frac{r}{r_0} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.187)$$

$$\sin \beta = \frac{m_1}{m_c + m_1} \frac{r}{r_0} \sin \theta \quad (3.188)$$

and

$$\frac{r}{r_0} = \frac{m_c + m_1}{m_c} \left[a * 4 \frac{m_1}{m_c} \left(\frac{m_c + m_1}{m_c} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{-1/2} \approx \frac{m_c + m_1}{m_c}, \quad (3.189)$$

が成り立つ. 最右辺の近似は θ が小さいか, $m_1 \ll m_c$ である場合でしか使えないが, その誤差はここでの結果に影響を及ぼさない. 故に

$$T_2 = -(gm_1/r^2) \bar{H}(\theta), \quad (3.190)$$

$$\bar{H}(\theta) = \frac{\cos(\theta/2)}{4 \sin^2(\theta/2)} - \sin \theta \quad (3.191)$$

ちなみに $\bar{H}(\theta) = -(1/2)dH(\theta)/d\theta$ である. 同様に m_1 に対して働く接線方向の力は,

$$T_1 = + (gm_2/r^2) \bar{H}(\theta), \quad (3.192)$$

である.

ここまでの結果により, 2つの質量の間の経度変化による質量の半長軸の長さの変化を計算することができる. 半長軸の長さの差を

$$s = a_2 - a_1, \quad (3.193)$$

とすると, 式 (3.185) より

$$\dot{s} = \dot{\theta} ds/d\theta = -2(T_1 - T_2)/n, \quad (3.194)$$

n は各質量の平均運動の平均である. ケプラーの第3法則より $\dot{\theta}/n = -(3/2)s/a$. a は各質量の平均の半長軸である. $ds/d\theta$ を境界条件 $(s_i, \theta_i), (s_j, \theta_j)$ で解くと,

$$\left(\frac{s_i}{a}\right)^2 - \left(\frac{s_j}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}g \frac{m_1 + m_2}{n^2 a^3} \int \theta_i \theta_j \bar{H}(\theta) d\theta = -\frac{4}{3}g \frac{m_1 + m_2}{n^2 a^3} [H(\theta_i) - H(\theta_j)], \quad (3.195)$$

を得る. 式 (3.191) から, $\bar{H}(\theta)$ は $\pm 60^\circ$ の時ゼロとなる. 故に平均運動 n の回転座標系内で, 全ての物体が安定な平衡点の位置は1辺が r の正三角形となる. その時の n は

$$n^2 r^3 = g(m_c + m_1 + m_2). \quad (3.196)$$

しかし $r \approx a$ を仮定し, 矛盾の無い様, $m_c + m_1 + m_2 \approx m_c$ も仮定したので, 式 (3.195) は

$$\left(\frac{s_i}{a}\right)^2 - \left(\frac{s_j}{a}\right)^2 = -\frac{4}{3} \frac{m_1 + m_2}{n^2 a^3} [H(\theta_i) - H(\theta_j)] \quad (3.197)$$

となる. これは式 (3.180) の $m_2 \ll m_1$ である場合の式である. この2つの式は軌道とゼロ速度曲線の関係の一般性を示している. 同様に式 (3.182), (3.183) は

$$\left(\frac{s}{a}\right)_{crit} = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_c}\right)^{1/2} \quad (3.198)$$

and

$$\left(\frac{s_{180}}{a}\right)^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_c}\right) [H(\theta_{min}) - 1]. \quad (3.199)$$

これらの結果を Janus と Epimetheus に当てはめてみる. 衛星が発見された時, 半長軸の差は $s_j = \Delta a_0 = 50\text{km}$, 角度差は $\theta_i = 180^\circ$ であった. 式 (3.197) に $m_2/m_1 = 0.25$ として, これらの値を代入すると, s の θ に関する変化を見ることができる. 各衛星の半長軸を $a_J = a + \Delta a_J$, $a_E = a + \Delta a_E$ と書くと, 式 (3.184) と, 各軌道の弧の長さの比が質量比であることを使うと, 回転系における Δa_J と Δa_E の変化を示すことができる (図 3.25). 小さな馬蹄形軌道は Janus に対応している. 前述したように, 正三角形平衡点の位置は, 制限問題でない場合にも使うことができる. 制限3体問題の軌道では粒子軌道の幅が最大になるのは, 摂動天体からの角度が $\pm 60^\circ$ となる点であった (図 3.18, 3.20). よってより一般的な場合に言えば, 衛星同士の角度が $\pm 60^\circ$ になる点で粒子軌道の幅が最大になると言うことがわかる.

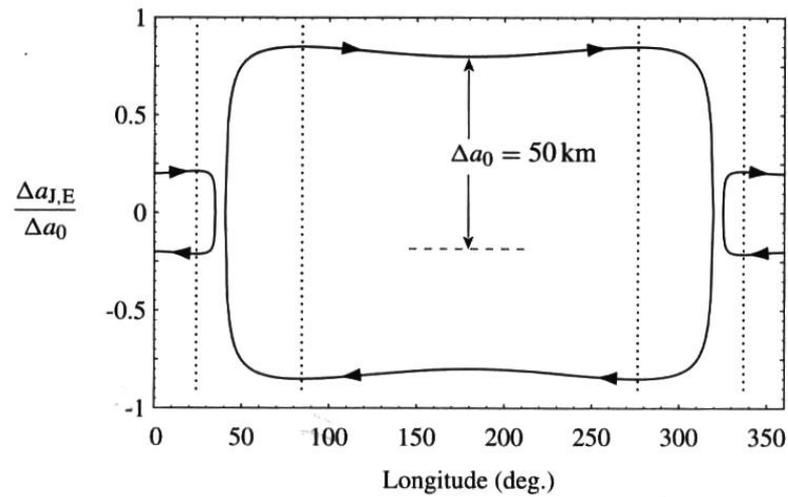


図 3.25: Janus-Epimetheus における回転系での $\Delta a_J/\Delta_0$, $\Delta a_E/\Delta_0$ の変化. ここで $\Delta_0 = 50\text{km}$ は衛星が 180 度離れている時の 2 つの軌道の半長軸の差である. 破線は軌道の幅が最大となる時の角度を示している. ちなみに軌道の幅が最大となるのは Janus と Epimetheus のなす角度が ± 60 度するときである.

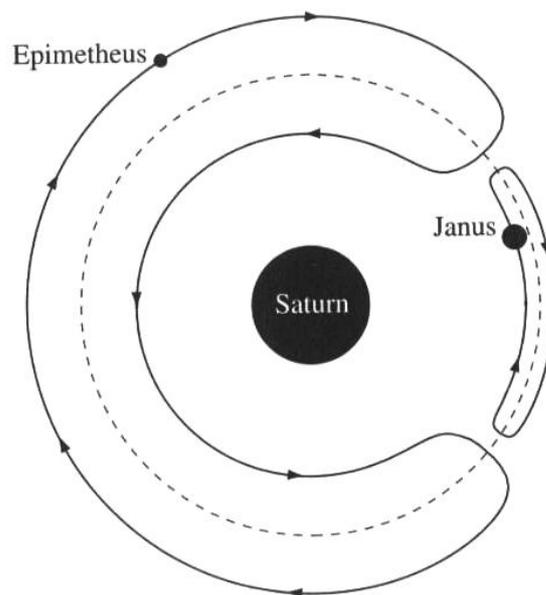


図 3.26: Janus-Epimetheus の軌道を 2 つの衛星の平均の平均運動で回転する系から見た時の軌道図. 軌道の幅は強調している. 軌道の幅の比は, 質量比と同じ ~ 0.25 である.

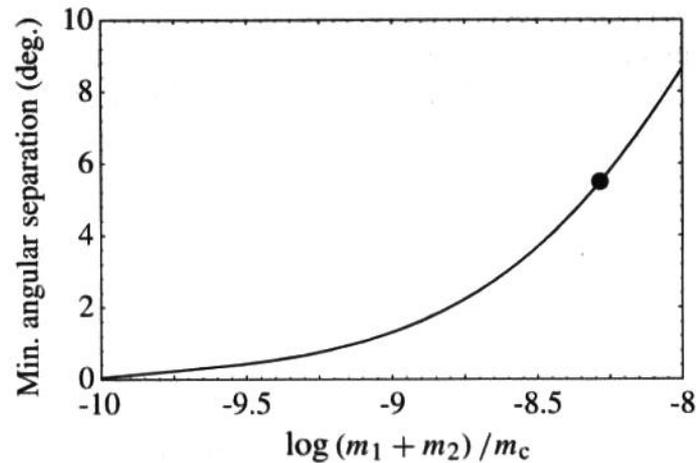


図 3.27: 2つの衛星の成す最小角度を質量の関数で表した図. 黒点は Janus-Epimetheus 系での値である.

図 3.26 では2つの衛星の平均運動の平均運動で回転する系から見た場合の衛星軌道を示している. この図では半径の変化を強調している. 実際の Janus と Epimetheus の軌道の幅は 10 km , 40 km である. また, 平均半長軸は 150432 km である. 図からわかるとおり, 片方の衛星がもう片方を追い抜くことは決してない. その代わりに, 4年毎の接近で互いの運動量の交換がおこり, 軌道の入れ替えが起こる.

上記の理論を使って, Dermott & Murray (1981b) は Janus と Epimetheus の運動の観測からどのようにして, 質量比や質量合計を決定するのかを示した. これは式 (3.199) を使って行われる. 図 3.27 では2つの guiding center の成す最小角度を衛星の質量合計の関数として表している. $s_{180}/a = 3.32 \times 10^{-4}$ とした. これはただの近似であるが, 数値積分による結果と 0.001 度の範囲での差しかないことがわかっている. Nicholson et al.(1992) は地上からの観測でデータを取り, 軌道に関する新たな解を示した. Janus と Epimetheus は互いに 5.64 度以内に接近し, また, 結果として得た質量からそれぞれの密度を $0.65 \pm 0.08 \text{ g cm}^{-3}$, $0.63 \pm 0.11 \text{ g cm}^{-3}$ と見積もった.Voyger によって得られた画像からこれらは氷でできており, 小さな密度をもつことから土星の小さな衛星は, 空隙のある氷からできている可能性を示している.

3.13 Hill's Equation

中心質量の周りを運動する小さな粒子の円制限3体問題では、主要な摂動は摂動天体に接近したときのみで起こる(3.9節). つまり粒子の運動の大部分は2体問題のケプラー運動と同じである. よってこの節では今までのように、摂動天体近傍以外での摂動を考慮した運動方程式ではなく、摂動天体近傍のみで意味をなすような運動方程式について考えてみる.

そのような方程式は、様々な近似や、摂動天体を基準とした座標系を使うことで表現することが可能となる. 小さな質量比 $\mu_1 \approx 1$ での $x - y$ 平面内での運動方程式は式(3.16)³⁰, (3.17)³¹ から、

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{x}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x-1}{r_2^3}, \quad (3.200)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3}, \quad (3.201)$$

となる. ここで、 x 軸を $x \rightarrow x + 1$ を変換し、 $\Delta = r_2$ とおく. ここでは摂動天体近傍(つまり L_1, L_2 近傍)での運動について考えているので、 x, y, Δ は $\mathcal{O}(\mu_2^{1/3})$ の微小量と仮定することができる. μ_2 の高次の項を無視することで、 $r_1 \approx (1 + 2x)^{1/2}$ を得る. よって式(3.200), (3.201)は

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x = \frac{\partial U_H}{\partial x}, \quad (3.202)$$

$$\ddot{y} - 2\dot{x} = -\frac{\mu_2}{\Delta^3}y = \frac{\partial U_H}{\partial y}, \quad (3.203)$$

where

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta}, \quad \text{and} \quad \Delta^2 = x^2 + y^2, \quad (3.204)$$

と書くことができる. Jacobi 定数も書き換えられて、

$$C_H = 3x^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2, \quad (3.205)$$

となる. もともとの Jacobi 定数は式(3.29)において z 軸方向の運動を無視し、 $n = 1$ とおくことで以下ようになる.

$$C_J = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2, \quad (3.206)$$

式(3.202), (3.203)は Hill 方程式(Hill's equation)と呼ばれ、Hill の月に関する研究の際に使われた. 式(3.202)から、 $3\Delta^3 = \mu_2$ の時、動径方向に働く力が消去される. これは潮

³⁰式(3.16): $\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -[\mu_1(x + \mu_2)/r_1^3 + \mu_2(x - \mu_1)/r_2^3]$

³¹式(3.17): $\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -[\mu_1/r_1^3 + \mu_2/r_2^3]y$

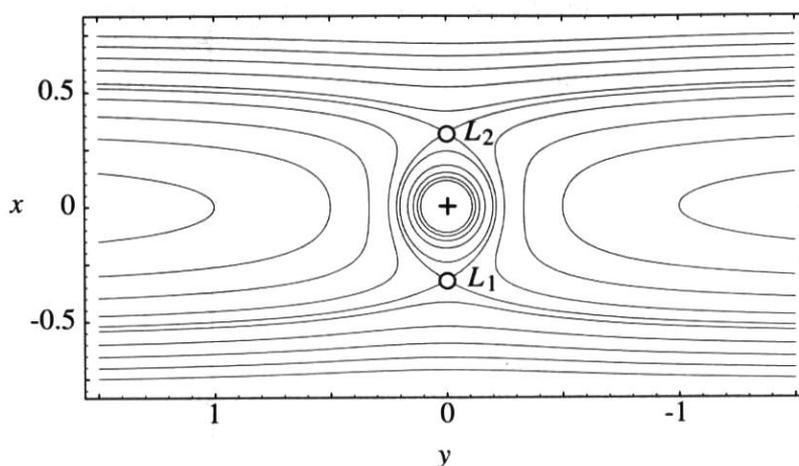


図 3.28: $\mu_2 = 0.1$ の場合の L_1, L_2 平衡点近傍でのゼロ速度曲線. Hill 近似においては, 平衡点は摂動天体 μ_2 から等距離にある.

汐力と重力相互作用が平衡となることを意味している. このことから, 摂動天体の周りに Hill 圏(Hill's sphere) を定義することができる.

$$\Delta_H = \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{1/3}. \quad (3.207)$$

式 (3.202), (3.203) において $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$ ($x \neq 0$) とすると, L_1, L_2 平衡点の位置を知ることができる. 式 (3.202) から $\Delta_{L_{1,2}} = (\mu_2/3)^{1/3}$, 式 (3.205) から $C_H = 3^{4/3} \mu_2^{2/3}$ を得る. この L_1, L_2 平衡点は式 (3.207) で定義した Hill 圏の境界上にある. ここで,

$$C_H = \zeta \mu_2^{2/3} \quad (3.208)$$

と書けるとすると, $\zeta < 3^{4/3}$ の領域で馬蹄形軌道が可能になる. L_1, L_2 平衡点近傍でのゼロ速度曲線を図 3.28 に示した.

上記の定義を使うことで, 軌道が円に近い場合の馬蹄形軌道とゼロ速度曲線の間を考察することができる. 円軌道においては $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{y} = 0$ であり, x, \dot{y} は以下の式で関係づけられる定数となる.

$$\dot{y}^2 = 3x^2 - \zeta \mu_2^{2/3}. \quad (3.209)$$

ここでは, 式 (3.205), (3.208) を使い, また, Δ は大きいものとしている. もし, x_{zv} を馬蹄形軌道に対応した x の値とするなら, $\dot{y} = 0$ と考えることで,

$$x_{zv}^2 = \frac{1}{3} \zeta \mu_2^{2/3}, \quad (3.210)$$

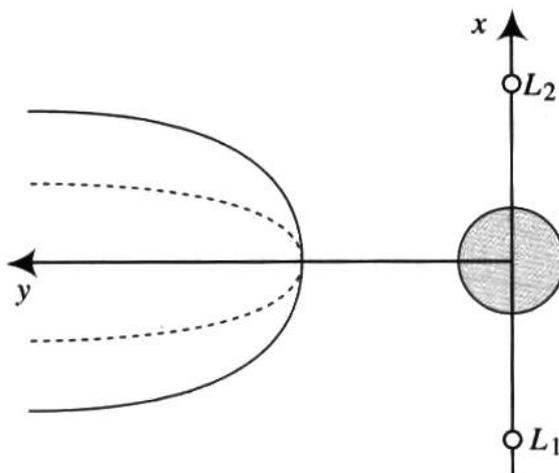


図 3.29: Hill 方程式を使った場合の円軌道に近い粒子軌道 (実線) とゼロ速度曲線 (破線) の図.

を得る. ここで $n^2 a^3 = 1$, 故に $\dot{y} = -(3/2)x$ であることから,

$$x^2 = \frac{4}{3} \zeta \mu_2^{2/3}, \quad (3.211)$$

となり, $x = 2x_{zv}$ 粒子軌道の幅はゼロ速度曲線の幅の 2 倍となる. これは 3.10 節で得た結果と同じものである. 図 3.29 に大まかに図示してある.

これらの結果は円軌道に近いものとした場合に得られるが, 粒子軌道を guiding center の楕円運動で表現される場合にも適用することができる (Dermott & Murray 1981a, b).

近似から得られた上記の運動方程式から, Tisserand の判定式を使うことで摂動天体への接近前後の軌道要素の関係を示すことができる. 接近前の軌道要素を $a_1 = 1 + \Delta a_1$, $e = \Delta e_1$ とし, 接近後の軌道要素を $a_2 = 1 + \Delta a_2$, $e = \Delta e_2$ とする. ここで Δa_1 , Δa_2 , Δe_1 , Δe_2 は微小量であるものとする. 3.4 節より Tisserand の判定式³² は

$$\frac{1}{1 + \Delta a} + 2(1 + \Delta a)^{1/2}(1 - \Delta e^2)^{1/2} \approx constant, \quad (3.212)$$

となる. 展開すると

$$\frac{3}{4} \Delta a^2 - \Delta e^2 \approx constant, \quad (3.213)$$

or

$$\frac{3}{4} \Delta a_1^2 - \Delta e_1^2 \approx \frac{3}{4} \Delta a_2^2 - \Delta e_2^2. \quad (3.214)$$

³²Tisserand の判定式: $\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)} \cos I = \frac{1}{2a'} + \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos I'$

となる. 故に軌道が単位半長軸に対して対称 (つまり $\Delta a_1 \approx -\Delta a_2$) であるとき, $\Delta e_1 \approx \Delta e_2$ となる.

Hill 方程式を考えることで同様の関係を導くことができる. 式 (3.202), (3.203) において Δ が大きいと考えると,

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = 3x, \quad (3.215)$$

$$\ddot{y} - 2\dot{x} = 0, \quad (3.216)$$

また, 式 (3.205) と (3.208) から,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 3x^2 - \zeta\mu_2^{2/3}, \quad (3.217)$$

と書くことができる. ここで guiding center 近似を使うと動径方向への粒子の変位は周期 $n = 1$, 振幅は周転円運動の離心率で変化し, $x = \Delta a + e \sin t$, $\dot{x} = e \cos t$, $\ddot{x} = -e \sin t$ と書くことができる. 式 (3.215), (3.216) から $\ddot{y} = -2e \cos t$,

$$\dot{y} = -\frac{3}{2}\Delta a - 2e \sin t, \quad (3.218)$$

となる. 上式右辺第一項は guiding center の速度であり, 第二項は粒子の guiding center 周りでの楕円軌道における速度を表している. 式 (3.217) での x, \dot{x}, \dot{y} を使って,

$$e^2 \cos^2 t + \left(-\frac{3}{2}\Delta a - 2e \sin t\right)^2 = 3(\Delta a + e \sin t)^2 - \zeta\mu_2^{2/3}, \quad (3.219)$$

を得る. ここから

$$\frac{3}{4}\Delta a^2 - \Delta e^2 = \zeta\mu_2^{2/3}, \quad (3.220)$$

となる. 右辺は定数. これは先ほどの Tisserand の関係式と同じである.

粒子軌道の y 軸に対する (軌道が楕円なら, guiding center に対する) 対称性から, 摂動天体からの距離の最小値 Δ_{min} を得ることができる. 図 3.29 から, 摂動天体からの距離は粒子軌道が y 軸に交差する点で最小となる. 粒子が円軌道を半長軸 $1 + \Delta a_0$ で運動しているとする. Hill の系における粒子の初期位置を (x_0, y_0) として, 式 (3.218) を使うと

$$\dot{y}_0 = -\frac{3}{2}x_0 = -\frac{3}{2}\Delta a_0 \quad (3.221)$$

故に式 (3.205) から

$$|\Delta a_0| = 2(\zeta/3)^{1/2}\mu_2^{1/3} \quad (3.222)$$

粒子軌道が y 軸に対して対称だとすると粒子が摂動天体に再接近する時, $x = 0, \dot{y} = 0, \dot{x} = \dot{x}_{min}, y = \Delta_{min}$ となる. \dot{x}_{min} は最接近位置での \dot{x} である. 式 (3.205) から

$$\dot{x}_{min} = 2\frac{\mu_2}{\Delta_{min}} - \zeta\mu_2^{2/3}. \quad (3.223)$$

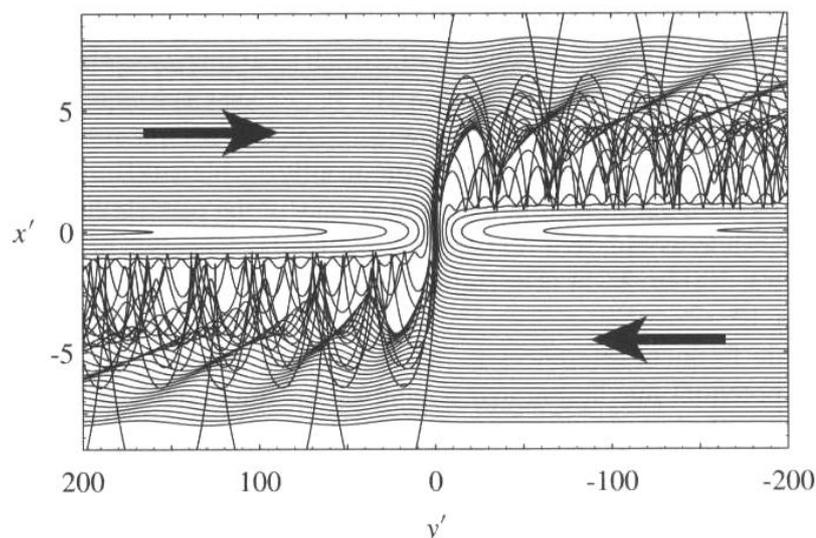


図 3.30: スケーリングされた Hill 方程式を解いた場合に得られる粒子軌道. 摂動天体は原点に, L_1, L_2 平衡点はそれぞれ $(x', y') = (\pm 1, 0)$ に位置している. 全ての粒子は $y' = \pm 200$ の位置から $\dot{x}' = 0$ で始まっている. 矢印は粒子が接近してくる方向を示している.

実際には $\dot{x}'_{min} \ll \dot{y}'_0^2$ (Dermott & Murray 1981a) であるので,

$$y_{min} \approx (2/\zeta)^{1/2} \mu_2^{1/3}, \quad (3.224)$$

もしくは, Δa を使って

$$y_{min} \approx \frac{8}{3} \Delta_0^2 \mu_2 \quad (3.225)$$

と表される.

Hill 方程式のもう一つの興味深い性質は系が $\mu_2^{1/3}$ で規格化できるということである. 式 (3.202), (3.203) に $m_2^{1/3} x \rightarrow x'(\mu_2/3)^{1/3}$, $y \rightarrow y'(\mu_2/3)^{1/3}$, $\Delta \rightarrow \Delta'(\mu_2/3)^{1/3}$ という変換をすると, 以下の方程式を得る.

$$\ddot{x}' - 2\dot{y}' = 3x' \left(1 - \frac{1}{\Delta'^3} \right), \quad (3.226)$$

$$\dot{y}' + 2\dot{x}' = -3 \frac{y'}{\Delta'^3}, \quad (3.227)$$

これらの方程式はパラメーターを含んでいない. よって粒子軌道が規格化されていることがわかる. この規格化された系では, L_1, L_2 平衡点は μ_2 から単位長さ分だけ離れた位置に存在する. 図 3.30 では規格化された方程式から求めた粒子軌道を図示している.

この図において、全ての軌道は正負両方向共に十分大きな y' の位置から始まっている。 y' 軸に近い位置 ($|x'| \ll 1.7$) から始まった軌道は全て”反射”されており、馬蹄形軌道を運動する。しかし、初期の $|x'|$ が大きくなるにつれ、大きな離心率を与えて軌道を乱す領域が出てくる。より初期の $|x'|$ 大きい軌道になると、粒子は摂動の影響を受けずに円軌道を運動する。

3.14 The Effects of Drag

天王星の周りに狭い、形のはっきりとしたリングが見つかったことにより、様々な力学的問題が提起されるようになった。リングが狭いことに関連した問題のひとつに Poynting-robertson(PR) 効果(太陽系内の微小粒子が放射によって力を受ける)により、リングは惑星に向かって螺旋状の形をとらなければならないというものがある。PR 抵抗は粒子が、吸収した太陽放射を不均一に再放射することで引き起こされる。粒子には大きさに依存した軌道の減衰を受け、その力は、粒子の大きさが入射する光の波長と同じ位の時に最も強い影響を及ぼす($\sim 10^{-6}\text{m}$)。放射を中心質量から受ける場合の PR 抵抗力は、以下の形を取る。

$$\mathbf{F} = -\frac{\beta \mathcal{G} m_c}{a^2 r^2} \left(\dot{x} - y + \frac{x}{r^2}(x\dot{x} + y\dot{y}), \dot{y} + x + \frac{y}{r^2}(x\dot{x} + y\dot{y}) \right) \quad (3.228)$$

β は放射による圧力の重力に対する比、 m_c は中心性の質量、 a は軌道半長軸、である。 β は放射源の光量と放射の圧力を受ける断面積に依存する。式(3.228)の $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ を含む各項は入射光のドップラー効果を表現しており、第2項目は PR 抵抗である (Schuerman 1980)。

Dermott & Gold (1977) は天王星の狭いリングは、 $\mu_2 < 10^{-10}$ の大きさの小さな衛星に対して馬蹄形軌道を運動することで、リングの形を維持しているという説を提案した。さらに Dermott et al.(1980) はこの理論を木星と土星の狭いリングに適用した。PR 抵抗はリング粒子を惑星に向かってらせん状に引き伸ばす (Burns et al. 1979)。しかし、馬

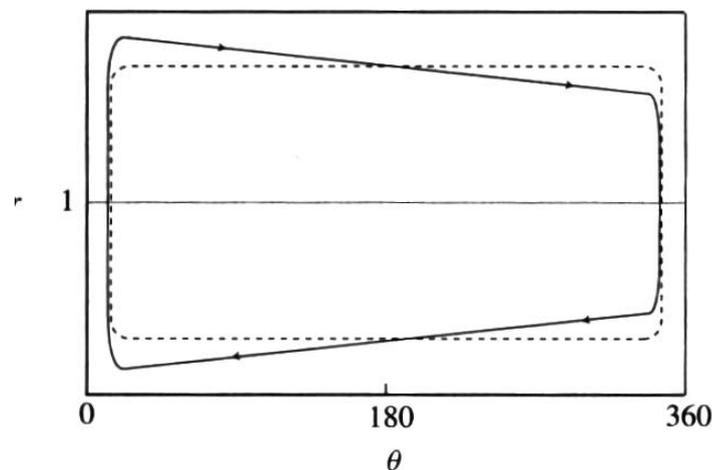


図 3.31: 回転系においてか馬蹄形軌道を回る粒子の軌道概略図。実線は抵抗力が存在する場合、破線は抵抗力が無い場合の軌道。粒子は離心率 $e \approx 0$ と仮定し、摂動天体は $r = 1, \theta = 0, 360$ 度に存在しているとした。

蹄形軌道モデルにおいて, 馬蹄形軌道半周後の軌道減衰は, 1 次の近似においてはもう半周するとキャンセルするのでリングの形は維持される. (図 3.31, 3.9 節)

L_4, L_5 平衡点はポテンシャルが最大の点であり, 抵抗力が存在する場合は, どのような抵抗力においても, これらの点ではエネルギーが減少し, 粒子は平衡点から離れるように運動する. このことは多くの文献で述べられている. 後で述べるように実際に何らかの抵抗力が存在する場合, 正三角形平衡点の安定性は単純なエネルギーの議論だけでは導くことはできない.

現実ではどんな粒子も重力摂動以外にも様々な外力の影響を受けている. 例えば, 放射圧の効果については多くの研究者によって研究されている. 以下では粒子に働く抵抗力の力学的効果について, 2 つのアプローチにより考察する. (i) ゼロ速度曲線の振る舞いについての考察, (ii) ラグランジュ平衡点の位置と安定性についての考察である.

また, 以下の考察では系内の物体は μ_1, μ_2 からの重力に加え, 任意の外力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ を受ける. $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ は粒子の位置と速度の関数であり, k を微小な何らかの物理量として $|\mathbf{F}| = \mathcal{O}(k)$ とする.

3.14.1 Analysis of the Jacobi Constant

3.2 節より, 回転系における運動方程式は以下ようになる.

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} + F_x, \quad (3.229)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} + F_y. \quad (3.230)$$

式 (3.229) に \dot{x} , 式 (3.230) に \dot{y} をかけて辺々足し合わせると,

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - \left(\dot{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \dot{x}F_x + \dot{y}F_y. \quad (3.231)$$

を得る. 通常, Jacobi 定数は $C_J = 2U - \dot{x}^2 - \dot{y}^2$ の形で書けるので,

$$\frac{dC_J}{dt} = -2(\dot{x}F_x + \dot{y}F_y) \quad (3.232)$$

となる. $\dot{x}F_x + \dot{y}F_y$ は単位時間あたりに \mathbf{F} が行う仕事である. ここで抵抗力について $k < 0$ であると仮定すると, \dot{C}_J の符号は $\dot{x}F_x + \dot{y}F_y$ の符号と逆になる. 3.3 節のゼロ速度曲線についての考察から, C_J の値が増加すると運動の排他領域が拡がり, 粒子運動は L_4, L_5 から離れていく.

回転系において抵抗力が粒子の速度に比例するとすると, $\mathbf{F} = k\mathbf{v} = k(\dot{x}, \dot{y})$ であり,

$$\dot{x}F_x + \dot{y}F_y = k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) < 0. \quad (3.233)$$

故にこの抵抗力 (nebular drag と呼ばれる) は, 粒子の軌道によらず, 粒子を L_4, L_5 点から離す方向に働く (Jeffreys 1929).

放射による PR 抵抗の場合は, 外力は

$$\mathbf{F} = k(\dot{x} - y, \dot{y} + x)/r^2, \quad (3.234)$$

であり,

$$\dot{x}F_x + \dot{y}F_y = k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - k(\dot{x}y - \dot{y}x). \quad (3.235)$$

となる. しかし, この表現では符号は簡単に決定することはできない. そのためには粒子の軌道を知らねばならず, これは任意の初期条件において決めることはできないからである. この例からもわかるとおり Jacobi 定数の解析だけでは安定性が決められない抵抗力もある.

3.14.2 Linear Stability of the L_4 and L_5 Points

ここからは平衡点付近での安定性を議論するため, 線形安定性解析を行う. L_4, L_5 平衡点では, 抵抗がない時は安定であるため, この点についての解析を行う. Murray (1994b) は 5 つのラグランジュ平衡点でのずれを抵抗定数 k の関数として表し, L_4, L_5 平衡点付近での摂動運動に関する固有方程式が以下のように表されることを示した.

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + (1 + a_2)\lambda^2 + \left(\frac{27}{4}\mu_2 + a_0\right) = 0. \quad (3.236)$$

定数 $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$ は全て $\mathcal{O}(k)$ であり, 以下で与えられる.

$$a_0 = \frac{9}{4}k_{x,x} + \frac{3}{4}k_{y,y} \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}(k_{x,y} + k_{y,x}) \quad (3.237)$$

$$a_1 = \frac{9}{4}k_{x,\dot{x}} + \frac{3}{4}k_{y,\dot{y}} + 2(k_{x,y} - k_{y,x}) \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}(k_{x,\dot{y}} + k_{y,\dot{x}}) \quad (3.238)$$

$$a_2 = -k_{x,x} - k_{y,y} + (k_{x,\dot{y}} - k_{y,\dot{x}}) \quad (3.239)$$

$$a_3 = -(k_{x,\dot{x}} - k_{y,\dot{y}}), \quad (3.240)$$

式 (3.237), (3.238) のプラスマイナスの符号はそれぞれ L_4, L_5 平衡点に対応する. また, $k_{x,x}, k_{y,x} \dots$ の表式は以下で定義される.

$$\begin{aligned} k_{x,x} &= \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} \right]_0, & k_{y,x} &= \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} \right]_0, & k_{x,\dot{x}} &= \left[\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right]_0, & k_{y,\dot{x}} &= \left[\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right]_0, \\ k_{x,y} &= \left[\frac{\partial F_x}{\partial y} \right]_0, & k_{y,y} &= \left[\frac{\partial F_y}{\partial y} \right]_0, & k_{x,\dot{y}} &= \left[\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right]_0, & k_{y,\dot{y}} &= \left[\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right]_0 \end{aligned} \quad (3.241)$$

添え字の 0 は偏微分が, 抵抗力を考えない場合の平衡点の位置での値をとることを意味する. これは, これら全ての量が $\mathcal{O}(k)$ であり, ずれも同程度の大きさであること, x_0, y_0 に比べて小さいと仮定していることから成り立つ.

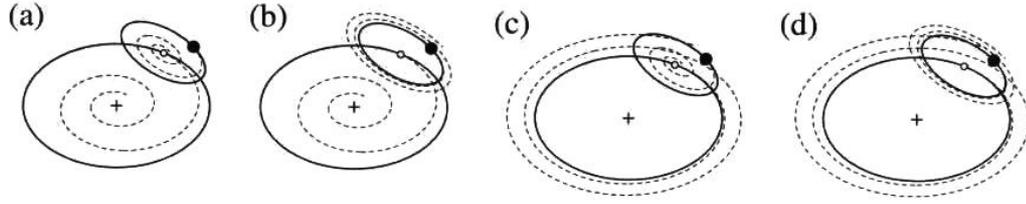


図 3.32: L_4, L_5 平衡点付近での摂動軌道の模式図. 実線は抵抗がない場合の粒子軌道, 破線は抵抗があるときの螺旋軌道を表す. (a) 固有値の全ての実部が負である (漸近円安定). (b) guiding center 運動に関する固有値が負, 周転円運動に関する固有値が正 (線形不安定). (c) guiding center 運動に関する固有値が正, 周転円運動に関する固有値が負 (線形不安定). (d) 固有値の全ての実部が正である (不安定)

式 (3.236), (3.237) から, a_i がゼロかつ $\mathcal{O}(\mu_2)$ までの項においては 4 次の方程式であるので, これらは抵抗がない場合の式と同じである (式 (3.141)³³). 抵抗がない場合の固有方程式の解は, 式 (3.145)³⁴ を満たす時, 純虚数となる. 抵抗がある場合の安定条件はもっと複雑になり, 図 3.32 で図示された 4 つの可能性が生ずる.

1. 固有値の全ての実部が負である場合, 漸近安定となる.
2. guiding center 運動に関する固有値が負であり, 周転円運動に関する固有値が正である時, 線形不安定.
3. guiding center 運動に関する固有値が正であり, 周転円運動に関する固有値が負である時, 線形不安定.
4. 全ての固有値の実部が正である時, 線形不安定.

Murray (1994b) は, $\mu_2 \rightarrow 0$ の極限では各 λ の実部が負となる, つまり漸近安定をもたらす条件は

$$0 < a_1 < a_3, \quad (3.242)$$

である. a_1, a_3 はそれぞれ, 式 (3.238), (3.240) で定義されている. ちなみに, これらの近似においては, 安定性は a_0, a_2 の値に依存せず, 故に L_4, L_5 での安定性は $k_{x,x}, k_{y,y}$ の値に依存しない. ここで L_4, L_5 での線形安定性という視点から 2 つの抵抗力について考察することができる.

$\mathbf{F} = k(\dot{x}, \dot{y})$ であるとすると, 式 (3.241) においてゼロでない値は,

$$k_{x,\dot{x}} = k, \quad k_{y,\dot{y}} = k, \quad (3.243)$$

³³式 (3.141) : $\lambda^4 + \lambda^2 + 27\mu_2/4(1 - \mu_2) = 0$

³⁴式 (3.145) : $\mu_2 \leq \frac{27 - \sqrt{621}}{54} \approx 0.0385$

であり、故に

$$a_1 = 3k, \quad a_3 = -2k, \quad (3.244)$$

となる。 $k < 0$ より $a_1 < 0$ であり、式 (3.242) を満たさない。 よってこの場合三角形平衡点は、Jacobi 定数に関する考察と同様に、この形の抵抗力が働く場合は不安定となる。

PR 抵抗の場合、 $\mathbf{F} = k(\dot{x} - y, \dot{y} + x)/r^2$ であり、式 (3.241) でゼロでない値を持つ定数は

$$k_{x,\dot{x}} = k_{y,x} = k_{y,\dot{y}} = k, \quad k_{x,y} = -k \quad (3.245)$$

であり、故に

$$a_1 = -5k, \quad a_3 = -2k, \quad (3.246)$$

である。 よって PR 抵抗中では線形不安定であることがわかる。

しかし興味深いことに $\mathbf{F} = k(\dot{x} - y, \dot{y} + x)$ の形の抵抗力を想定すると、式 (3.241) におけるゼロでない定数は、

$$k_{x,\dot{x}} = k_{y,x} = k_{y,\dot{y}} = k, \quad k_{x,y} = -k, \quad (3.247)$$

となり、

$$a_1 = -k, \quad a_3 = -2k. \quad (3.248)$$

であるので式 (3.242) が満たされ、三角形平衡点は抵抗力の中でも安定となる。 このことは、常に小さな振幅を仮定しているので、平衡点周りでの馬蹄形軌道や Tadpole 軌道のような振幅の大きな軌道の安定性について応用することはできない。

3.14.3 Inertial Drag Forces

Murray (1994b) は一般的な単位質量あたりの抵抗力として以下の形を提案した。

$$\mathbf{F}_i = k\mathbf{V}g(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (3.249)$$

ここで、 $k < 0$ であり、 $\mathbf{V} = (\dot{x} - y, \dot{y} + x)$ は慣性系における粒子の速度である。 $g(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ は粒子の位置と速度に関するスカラー関数である。 Murray (1994b) この力を inertial drag と呼んだ。 抵抗定数 k を運動方程式から消去すると

$$r^2 r_1^3 r_2^3 + \mu_2 r_1^3 (\mu_1 x - r^2) - \mu_1 r_2^3 (\mu_2 x + r^2) = 0, \quad (3.250)$$

となる。 これは5つの平衡点がこの軌道に沿って移動することを表している。 図 3.33a では、軌道の $\mu_2 = 0.2$ の場合を示した。

$\mu_2 \rightarrow 0$ の極限において、Murray は L_3, L_4, L_5 平衡点は単位円に沿って移動し、 L_1, L_2 平衡点は摂動天体付近の円に沿って移動することを示した。 $g^* = g(x, y, 0, 0) = g^*(r)$

(半径のみの関数)である場合, 微小な μ_2 に対して L_4, L_5 の位置の角度は以下の式で表される.

$$\frac{\bar{k}}{\mu_2} = \sin \theta \left(\frac{1}{(2 - 2 \cos \theta)^{3/2}} - 1 \right). \quad (3.251)$$

ここで, $\bar{k} = kg^*(1)$ である. この関数を図 3.33b にて図示した. この関数は $\theta = 108.4, \theta = 251.6$ 度の時, それぞれ $\bar{k}/\mu_2 = -0.7265, \bar{k}/\mu_2 = +0.7265$ の極値をとる. 故に L_3, L_4 平衡点は, それぞれ 180 度, 60 度の位置から $\bar{k}/\mu_2 = -0.7265$ となる $\theta = 108.4$ の位置に移動することができる. このことは g_r の形によらない. これらの結果から, g^* が r の関数であるような全ての系においては, L_4 が存在しなくなっても L_5 は生き残ることがわかる.

inertial drag 中で移動した L_4, L_5 平衡点の安定性は 3.14.2 節でのやり方で考察することができる. 例えば, Murray (1994b) は inertial drag を以下の形とおいた.

$$\mathbf{F}_i = k \mathbf{V} \mathbf{V}^i r^i, \quad (3.252)$$

i, j は実数. Murray は, $k < 0$ かつ以下の式が満たされる場合は, 正三角形平衡解は抵抗力に対して漸近安定だろうということを示した.

$$0 < 1 - i + 2j < 2 + i \quad (3.253)$$

ここで, $i = 0, j = n$ であるとする. この抵抗力は $-1/2 < n < 1/2$ が満たされれば L_4, L_5 平衡点での安定性をもたらす. これは正三角形平衡点の安定性を議論する際に抵抗の形によって分けて考える必要があることを示す. Murray (1994b) はまた, 抵抗力が大きい場合は, L_4, L_5 平衡点が共に不安定となる可能性を示した. このことからトロヤ小惑星群の非対称性を説明できる.

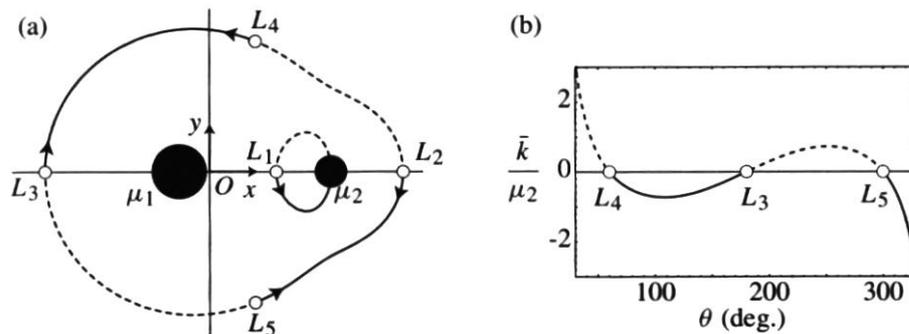


図 3.33: (a) 式 (3.249) において $\mu_2 = 0.2$ とした時のラグランジュ点が移動する軌道の図. (b) \bar{k}/μ_2 (\bar{k} は本文中で定義された, 変形された抵抗定数) と L_3, L_4, L_5 点の移動角度 $\theta(30 \leq \theta \leq 330)$ との関係. ここでは質量比は微小であると仮定している. 各図の実線は $k < 0$ の場合, 破線は $k > 0$ である場合を示している.